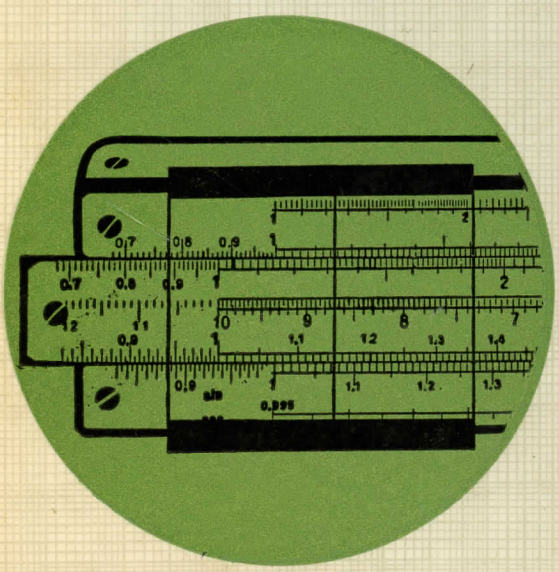
Boris Apsen

Logaritamsko računalo

osnove i praktično računanje



POLITEHNIČKA BIBLIOTEKA

11148

22 –

Boris Apsen

LOGARITAMSKO RAČUNALO

OSNOVI I PRAKTIČNO RAČUNANJE

POLITEHNIČKA BIBLIOTEKA

Urednik: Marijan Brezinščak

Svezak 8

Sadržaj i namjena djela

Od svih matematičkih instrumenata što olakšavaju i ubrzavaju rad svakoga koji praktički računa, najviše se upotrebljava logaritamsko računalo. Jednostavnost rukovanja, brzina kojom se pomoću računala mehanički izvode i zamršene računske operacije, male dimenzije, težina i cijena čine ovaj instrument apsolutno potrebnim za praktično računanje.

U knjizi su pedagoški veoma uspješno prikazani načini upotrebe logaritamskog računala. Mnogobrojni riješeni primjeri i sistematska uputstva omogućavaju čitaocu da nauči ispravno i dovoljno tačno računati služeći se logaritamskim računalom, a vježbe i vrijeme pridonijet će da se stekne i brzina. Naročita pažnja posvećena je ispravnom očitavanju vrijednosti na pojedinim dijelovima skala.

Postepeni prijelaz od najjednostavnijih na složenije matematske operacije omogućava čitaocu da bez teškoća nauči služiti se logaritamskim računalom. Posebna je pažnja posvećena računanju vrijednosti logaritama, trigonometrijskih funkcija i potencija.

Knjiga će služiti i kao udžbenik i kao priručnik svima onima koji u praksi upotrebljavaju logaritamsko računalo.

Boris Apsen

LOGARITAMSKO RAČUNALO

OSNOVI I PRAKTIČNO RAČUNANJE

VII izdanje

TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB

KGZ - GRADSKA KNJIŽNICA
otpisano
140.587
518.2
GRADSKA KNJIŽNICA ZAGREB

Predgovor

Predašnja izdanja moga »Logaritamskog računala« sadržavala su osim općeg dijela i opisa općih skala logaritamskih računala i njihove upotrebe još i detaljan opis i način upotrebe nekih specijalnih logaritamskih računala, kao npr. elektro--računala, tahimetrijskih računala i dr. Međutim sad kad se u prodaji nađe mnogo sistema općih i specijalnih logaritamskih računala i to sa skalama koje su na najrazličitiji način konstruirane i smještene, nije moguće dati opis i upotrebu svih tih računala, a u drugu ruku to nije ni potrebno, jer je osnovno načelo svih općih i specijalnih skala i logaritamskih računala isto za sve te skale, pa svaki tko zna računati na općim skalama lako će se snaći u upotrebi specijalnih skala detaljno opisanih u uputi priloženoj dotičnom specijalnom računalu.

Želeći da moje novo »Logaritamsko računalo« bude što kraće, preglednije i jednostavnije i time pristupačnije svakome tko hoće i treba da se služi tim neophodnim, jeftinim i praktičnim instrumentom, izostavio sam i u ovom VII izdanju sve posebne vrste računala a ostavio sam načelo računala i opis i upotrebu onih skala koje ima svako logaritamsko računalo, tj. skala za množenje i dijeljenje, za kvadriranje i vađenje drugog korijena, za kubiranje i vađenje trećeg korijena, za logaritmiranje i konačno za određivanje vrijednosti goniometrijskih funkcija i općenite potencije. Kako je većina tih skala konstruirana i smještena po sustavu »Rietz«, odnosno »Darmstadt« zadržao sam te sustave.

Svaka operacija na računalima ilustrirana je mnogobrojnim primjerima od kojih su mnogi prikazani na slikama, također i za računala drugih sustava.

Da dadem podstrek za što širu primjenu logaritamskog računala pri rješavanju različitih problema, zadržao sam u ovom novom izdanju poglavlje o rješavanju trokuta.

Na kraju molim drage čitaoce da mi jave svoje želje i sugestije koje bih mogao uzeti u obzir u sljedećem izdanju »Logaritamskog računala«. Moja adresa: Zagreb Vončinina 8.

Zagreb, listopada 1969. B. APSEN

Sadržaj

NAČELO I OPIS

		Strana
1.	**Općenito o logaritamskom računalu**	11
2.	**Načelo logaritamskog računala**	11
3.	**Opis logaritamskog računala**	15
3.1.	Skale na prednjoj strani računala	15
3.2.	Skale na računalu sustava »Rietz«	16
3.3.	Skale na stražnjoj strani jezika	16
3.4.	Skale na računalima drugih sustava	17
3.5.	Skale na računalu sustava »Darmstadt«	17
4.	**O položaju decimalnog zareza**	18
5.	**Uvjeti za brzo i sigurno računanje**	19
6.	**Postavljanje i očitavanje brojeva na skalama računala**	19
6.1.	Skale C i D	20
6.1.1.	Razmak »1« do »2«	20
6.1.2.	Razmaci »2« do »3« i »3« do »4«	21
6.1.3.	Ostali razmaci između »4« i »10«	22
6.1.4.	Praktične napomene	23
6.2.	Skale A i B	24
6.3.	Skale K, R i L	24
6.4.	Skale S, S & T, T i dr.	24
7.	**Tačnost logaritamskog računala**	24
8.	**Računanje većom tačnošću**	27
9.	**»Broj mjesta« brojeva**	28

OPERACIJE NA LOGARITAMSKOM RAČUNALU

10.	**Množenje**	29
10.1.	Produkt dvaju faktora	29
10.1.1.	Računanje	29
10.1.2.	Broj mjesta produkta	31
10.1.3.	Računanje produkta na skalama A i B	32
10.2.	Produkt od više faktora	33
10.3.	Nastavci skala logaritamskog računala	34
11.	**Dijeljenje**	35
11.1.	Računanje	35
11.2.	Broj mjesta kvocijenta	37
11.3.	Računanje kvocijenta na skalama A i B	37

12. Kombinirano množenje i dijeljenje 38

12.1. Trojno pravilo $\frac{a \cdot b}{c}$ 38

12.2. Složeni oblici tipa $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot f \cdot g \cdot h}$ 41

12.2.1. Općenito o računanju složenih oblika 41
12.2.2. Složeni oblici u kojima brojnik ima jedan faktor više od nazivnika 42
12.2.3. Svi ostali složeni oblici u kojima broj faktora u brojniku nije za jedan veći od broja faktora u nazivniku 44
12.2.4. Primjedbe 46

13. Kvadrat i drugi korijen 47

13.1. Načela računanja 47
13.2. Kvadriranje 48
13.2.1. Računanje 48
13.2.2. Broj mjesta kvadrata 49
13.2.3. Kombinirano kvadriranje, množenje i dijeljenje 50
13.2.3.1. Oblici tipa $a^2 \cdot b$ 50
13.2.3.2. Oblici tipa a^2/b 51
13.3. Određivanje drugog korijena 52
13.3.1. Računanje 52
13.3.2. Broj mjesta drugog korijena 54

14. Kub i treći korijen 55

14.1. Načela računanja 55
14.2. Kubiranje 56
14.2.1. Računanje 56
14.2.2. Broj mjesta kuba 57
14.3. Određivanje trećeg korijena 59
14.3.1. Računanje 59
14.3.2. Broj mjesta trećeg korijena 60

15. Potencije s eksponentima 3/2 i 2/3 63

15.1. Oblici tipa $a^{3/2}$ 63

15.2. Oblici tipa $a^{2/3}$ 64

16. Logaritmiranje 64

16.1. Određivanje karakteristike logaritma 64
16.2. Skala L 65
16.3. Određivanje mantise logaritma i antilogaritmiranje 65

17. Potencije s eksponentima uzetim po volji 67
18. Određivanje recipročnih vrijednosti 68
19. Određivanje lučne mjere kuta (arc α) 71
20. Određivanje prirodnih vrijednosti goniometrijskih funkcija 74

20.1. Općenito o određivanju vrijednosti funkcija sinusa i tangensa . . 74
20.2. Računala s trigonometrijskim skalama smještenim na stražnjoj strani jezika 75

20.2.1. Opis trigonometrijskih skala tih računala 75
20.2.1.1. Općenito o tim skalama 75
20.2.1.2. Skala S na računalima s tri trigonometrijske skale 77
20.2.1.3. Skala S na računalima s dvije trigonometrijske skale 77
20.2.1.4. Skala T 78
20.2.1.5. S & T 78
20.2.2. Određivanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija na računalima sa skalama smještenim na stražnjoj strani jezika i određivanje kuta iz zadane vrijednosti funkcije 78
20.2.2.1. Određivanje vrijednosti sinusa i tangensa kutova od 0 do 34′ . 78
20.2.2.2. Određivanje vrijednosti sinusa i tangensa kutova od 34′ do 5°44′ 79
20.2.2.3. Određivanje vrijednosti sinusa kutova od 5°44′ do 90° 81
20.2.2.4. Određivanje vrijednosti tangensa kutova od 5°44′ do 45° 82
20.2.2.5. Određivanje vrijednosti kosinusa kutova od 0 do 90° 84
20.2.2.6. Određivanje vrijednosti kontangensa kutova od 0 do 45° 84
20.2.2.7. Određivanje vrijednosti tangensa kutova od 45° do 90° 86
20.2.2.8. Određivanje vrijednosti kotangensa kutova od 45° do 90° 86
20.2.2.9. Određivanje vrijednosti goniometrijskih funkcija kutova većih od 90° 86
20.3. Računala sustava »Darmstadt« 87
20.3.1. Opis trigonometrijskih skala računala sustava »Darmstadt« 87
20.3.2. Određivanje vrijednosti sinusa, tangensa i kotangensa za kutove od 0° do 5° i vrijednosti kosinusa, tangensa i kotangensa za kutove od 85° do 90° 89
20.3.2.1. Određivanje vrijednosti sinusa i tangensa za kutove od 0° do 5° . 89
20.3.2.2. Određivanje vrijednosti kontangensa za kutove od 0° do 5° . . . 90
20.3.2.3. Određivanje vrijednosti kosinusa i kotangensa za kutove od 85° do 90° 91
20.3.2.4. Određivanje vrijednosti tangensa kuta od 85° do 90° 91
20.3.3. Određivanje vrijednosti sinusa za kutove od 5° do 90° i vrijednosti kosinusa od 0 do 85° 92
20.3.4. Određivanje vrijednosti tangensa i kontangensa za kutove od 5° do 85° 93
20.3.5. Primjedbe i pregledne tablice za računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija 94
20.3.6. Određivanje vrijednosti goniometrijskih funkcija kutova većih od 90° 97
20.3.7. Određivanje kuta iz zadane vrijednosti goniometrijske funkcije . 98
20.3.7.1. Zadana vrijednost sin, tg i ctg manja od 1, ali veća od 0,087 . . 98
20.3.7.2. Zadana vrijednost kosinusa veća od 0,087 98
20.3.7.3. Zadana vrijednost goniometrijske funkcije manja od 0,087 98
20.3.7.4. Zadana vrijednost tangensa i kotangensa veća od 1 100

21. Određivanje potencije broja *e*, prirodnih logaritama i općenite potencije 101
21.1. Logaritamska skala logaritama (log-log-skala) 101
21.1.1. Načelo log-log-skale 101
21.1.2. Opis log-log-skala 102
21.2. Izvođenje računskih operacija pomoću log-log-skale 104
21.2.1. Određivanje pozitivnih potencija broja $e = 2{,}71828$ 104
21.2.2. Određivanje negativnih potencija broja *e* i pozitivnih kojima je eksponent manji od 0,01 (0,1), odnosno veći od 11,2 105

21.2.3. Određivanje prirodnih logaritama brojeva od 1,01 ili 1,1 do 73142 i antilogaritmiranje 106
21.2.3.1. Načela računanja 106
21.2.3.2. Na log-log-skali računala sustava »Darmstadt« 106
21.2.3.3. Na log-log-skali drugih sustava računala 107
21.2.4. Rješavanje eksponencijalnih jednadžbi oblika $e^x = c$ i $e^{1/y} = d$. 108
21.2.4.1. Eksponencijalna jednadžba $e^x = c$ 108
21.2.4.2. Eksponencijalna jednadžba $e^{1/y} = d$ 108
21.2.5. Određivanje općenite potencije 109
21.2.5.1. Načela računanja 109
21.2.5.2. Na log-log-skali računala sustava »Dermstadt« 109
21.2.5.3. Na log-log-skali drugih sustava računala 112
21.2.6. Određivanje općenitog korijena 113

22. Značenje i upotreba nekih znakova na računalu i kazaljke s tri indeksne crte 115

22.1. Znakovi: $\pi, \frac{1}{\pi}$, M i $\frac{\pi}{4}$ 115

22.2. Određivanje površine kruga 115
22.2.1. Načelo računanja 115
22.2.2. Određivanje površine kruga pomoću kazaljke s tri indeksne crte 116
22.2.2.1. Načelo računanja 116
22.2.2.2. Određivanje kružnoga poprečnog presjeka Q iz zadanoga promjera d 117
22.2.2.3. Određivanje promjena d kružnog poprečnog presjeka iz njegove zadane površine Q 118
22.2.3. Preračunavanje kilovata u konjske snage i obratno 119

23. O mogućnosti najšire primjene logaritamskog računala . . 121

23.1. Rješavanje pravokutnih trokuta 121
23.2. Rješavanje kosokutnih trokuta 123
23.2.1. Rješavanje trokuta u kojem je zadana jedna stranica i dva kuta . 123
23.2.2. Rješavanje trokuta u kojem su zadane dvije stranice i kut koji leži nasuprot jednoj od tih stranica 124
23.2.3. Rješavanje trokuta u kojem su zadane dvije stranice i kut između njih 124
23.2.4. Rješavanje trokuta u kojem su zadane sve tri stranice 128

1. OPĆENITO O LOGARITAMSKOM RAČUNALU

Od svih matematičkih instrumenata što olakšavaju i ubrzavaju rad svakoga koji praktički računa, najviše se upotrebljava logaritamsko računalo. Jednostavnost rukovanja, brzina kojom se pomoću računala mehanički izvode i zamršene računske operacije, neznatnost dimenzija, težine i cijene čine ovaj instrument apsolutno potrebnim za praktično računanje.

Kako ćemo kasnije vidjeti, logaritamsko je računalo grafička logaritamska tablica i prema tome se može upotrebiti u svim slučajevima kad se upotrebljavaju logaritmi. Logaritamsko računalo, kao i svaka logaritamska tablica, omogućuje izvođenje računskih operacija samo ograničenom tačnošću. Tačnost običnog logaritamskog računala odgovara tačnosti logaritamskih tablica s tri mjesta, a u osobito povoljnim mjestima računala čak tačnosti tablica s četiri mjesta, što je gotovo kod sviju tehničkih zadaća potpuno dovoljno. U ovim je slučajevima upotreba računala kategorički imperativ za svakog tehničara koji mora brzo i pouzdano računati, a da se ne umara mehaničkim duševnim radom.

2. NAČELO LOGARITAMSKOG RAČUNALA

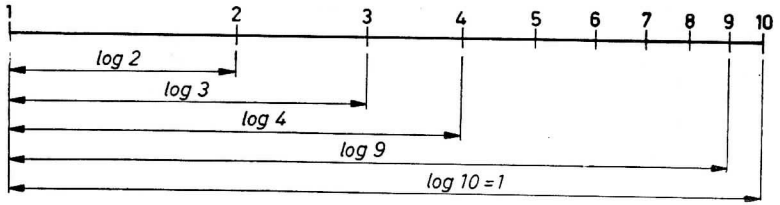
Da se brzo i sigurno računa logaritamskim računalom svakako je potrebno poznavanje načela koje je osnov logaritamskom računalu.

Logaritamsko računalo osniva se na grafičkom predočivanju funkcija pomoću funkcijske skale. To se sastoji u tome da se na pravac nanose u linearnom mjerilu vrijednosti funkcije, a na kraju dužina, koje predočuju vrijednosti funkcije, označuju se vrijednosti argumenata koje im pripadaju. U osnovi logaritamskoga računala leži funkcijska

skala za logaritamsku funkciju, tj. za funkciju $y = \log x$.* U ovoj formuli x znači argument, tj. broj koji se logaritmira, a dekadski logaritam broja x, tj. $\log x$, označen je sa y. Naša funkcija je dakle y. Da konstruiramo funkcijsku skalu te funkcije uzmimo logaritamske tablice i prepišimo logaritme brojeva od 1 do 10

x	$\log x = y$	x	$\log x = y$
1	0,000	6	0,778
2	0,301	7	0,845
3	0,477	8	0,903
4	0,602	9	0,954
5	0,699	10	1,000

Povucimo pravac te na njemu označimo sa 0 tačku po volji i ona će biti početna tačka. Odaberimo po volji jedinicu kojom ćemo nanositi logaritme, a uzmimo da je smisao na desno od početne tačke 0 pozitivan. Nanesimo sada u odabranoj jedinici y-e, tj. logaritme brojeva od 1 do 10; u dobivenim tačkama ne pišemo vrijednosti logaritama, već vri-



Sl. 1. Logaritamska skala

jednosti argumenata x, tj. brojeve čije samo logaritme nanijeli u linearnoj mjeri.

Na slici 1 dužina omeđena tačkama »1« i »2« i izmjerena jedinicom koja je predočena dužinom omeđenom tačkama »1« i »10«, ima vrijednost $\log 2 = 0{,}301$, no na kraju dužine, tj. u tački »2«, nije označena ta vrijednost nego vrijednost argumenta, tj. 2. Na taj smo način dobili funkcij-

* O logaritmima vidi npr. od istog pisca: Repetitorij elementarne matematike, Tehnička knjiga, Zagreb.

sku skalu funkcije $y = \log x$, tj. logaritamsku skalu i to za x od 1 do 10, dakle za jednu logaritamsku jedinicu.

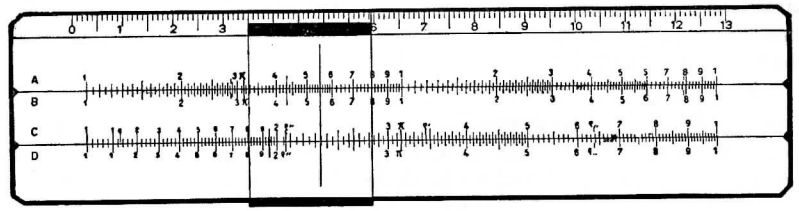
Uzmemo li sada šestar možemo već pomoću ove skale izvesti neke računske operacije, npr. množenje i dijeljenje. Izračunajmo pomoću naše skale produkt $2 \cdot 3$. Neka je $2 \cdot 3 = a$; logaritmiranjem dobijemo:

$$\log 2 + \log 3 = \log a;$$

odatle: $a = \text{numerus}\ (\log 2 + \log 3)$.

Uzmimo u šestar dužinu »1« do »2«, tj. dužinu »log 2«, pa joj dodajmo dužinu »1« do »3«, tj. otvorimo šestar još za dužinu »log 3«; ako sada jedan šiljak šestara zabodemo u tačku »1« logaritamske skale, past će drugi šiljak tačno u tačku »6« te skale, jer je prema naravi logaritma $\log 2 + \log 3 = \log 6$.

Na isti ćemo način dobiti pomoću naše logaritamske skale da je npr. $8 : 4 = 2$, jer je $2 = \text{numerus}\ (\log 8 - \log 4)$. Postupak je sličan: uzmemo u šestar dužinu »1« do »4«, tj. dužinu »log 4« pa je oduzmemo od dužine »1« do »8«, tj. od dužine »log 8« i to na taj način da desni šiljak



Sl. 2.

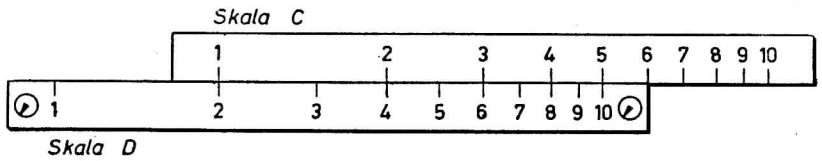
šestara otvorenog za dužinu »1« do »4« zabodemo u tačku »8« naše skale. Lijevi šiljak šestara past će u tačku »2« skale.

Vidimo da se pri upotrebi logaritamske skale množenje svodi na zbrajanje, a dijeljenje na oduzimanje dužina.

Slika 2 prikazuje logaritamsko računalo; vidi se da su skale nanesene na toj spravi funkcijske skale za logaritamsku funkciju $y = \log x$, tj. logaritamske skale. Zaista, ako usporedimo slike 1 i 2 vidjet ćemo da se obje donje sasvim identične skale C i D računala slažu s našom gore narisanom logaritamskom skalom, dok obje gornje skale A i B računala predočuju logaritamske skale narisane u dva

puta manjem mjerilu. Razlika prema našoj logaritamskoj skali je samo ta da su skale računala još i dalje razdijeljene, tj. na ovim skalama računala nanesene su i dužine logaritama razlomaka koje smo pri risanju naše logaritamske skale izostavili.

Prema tome računske operacije pomoću logaritamskog računala izvode se na temelju istog jednostavnog načela koje smo upotrebili pri računanju pomoću logaritamske skale, tj. množenje se svodi na zbrajanje, a dijeljenje na oduzimanje dužina, no bez upotrebe šestara. Upotreba šestara oduzimala bi mnogo vremena i slabo utjecala na tačnost računanja. Mjesto toga imamo na logaritamskom računalu dvije



Sl. 3.

identične skale koje se kreću jedna prema drugoj. Da to dobro sebi predočimo narišimo na dvije pruge tvrdog papira logaritamske skale, uzevši za jedinicu istu dužinu (slika 3).

Ako skalu D pričvrstimo na stolu, a skalu C pomičemo uz nju, možemo lako izvesti operacije množenja i dijeljenja. Postavimo li npr. iznad tačke »2« čvrste skale D tačku »1« pomične skale C, očitat ćemo na skali D ispod tačke »3« skale C broj »6«, tj. produkt brojeva 2 i 3. Međusobni položaj obiju skala za ovaj primjer $2 \cdot 3$ predočen je na slici 3.

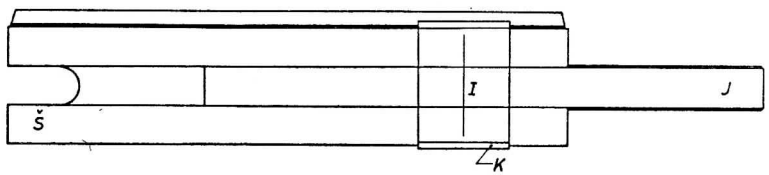
Istodobno možemo očitati produkte $2 \cdot 2 = 4$, $2 \cdot 4 = 8$ i $2 \cdot 5 = 10$.

Ako sada uzmemo u ruke računalo pa zamislimo da donja skala D računala (slika 2) odgovara skali D koja je bila pričvršćena na stolu, a skala C računala odgovara našoj pomičnoj skali C, pa možemo pomicanjem skale C računala izračunati i na računalu zadatke kao gore navedene.

Vidimo prema tome da bi jedan par logaritamskih skala, npr. C i D (slika 2) bio sasvim dovoljan za izvođenje operacija množenja i dijeljenja. Druge skale koje vidimo na logaritamskom računalu služe za izvođenje drugih računskih operacija.

3. OPIS LOGARITAMSKOG RAČUNALA

Kako se vidi na slici 2 i 4 logaritamsko se računalo sastoji od *štapa Š. jezika J* i *kazaljke K.* Dužina običnog računala iznosi 27 do 28 cm, dok su njegove skale duge 25 cm. Jezik se kreće u utorima štapa. I štap i jezik izrađeni su od drva na koje su nalijepljene pločice od celuloida s urezanim skalama. Iznad štapa i jezika kliže se u utorima štapa kazaljka, tj. staklena pločica u okviru od laka metala, na kojoj su urezane jedna ili tri usporedne crte. To su tvr. *indeksne crte.* Srednja



Sl. 4.

(glavna) indeksna crta *I* kazaljke služi za označivanje brojeva koje hoćemo da postavimo, odnosno očitamo, dok se obje krajnje indeksne crte, ukoliko postoje na kazaljki, posebno primjenjuju, o čemu će biti govora kasnije. Pomoću dvostrukoga pera postizava se stroga usporednost crta kazaljke s crticama skala.

Na stražnjoj strani računala nalaze se obično tablice najvažnijih konstanata i formula, dok na rubovima štapa imamo, osim nekih skala, još i ravnalo s mjerilom.

3.1. Skale na prednjoj strani računala

Svako logaritamsko računalo, bez obzira na njegovu posebnu svrhu, ima dva para logaritamskih skala koje su označene na slikama 2, 5 i 6 slovima A, B i C, D; ove osnovne skale služe za množenje, dijeljenje, kvadriranje i vađenje drugog korijena.

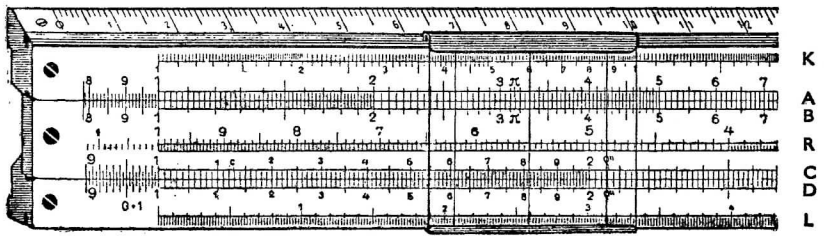
Kako vidimo, skala A je gornja skala štapa, a njoj identična skala B gornja je skala jezika, dok je skala C donja skala jezika, a njoj identična skala D donja skala štapa. Prema tome skale A i D leže na štapu, a skale B i C na jeziku.

Kako smo već rekli, identične skale C i D sadržavaju po jednu logaritamsku jedinicu, dok identične skale A i B sadržavaju po dvije logaritamske jedinice.

Neka logaritamska računala, npr. računalo predočeno na slici 2, imaju na prednjoj strani samo četiri osnovne skale.

3.2. Skale na računalu sustava »Rietz«

Da se omogući izvođenje većega broja računskih operacija mnoga novija računala imaju još i druge skale. Slika 5 predočuje nam jedno takvo logaritamsko računalo sustava »Rietz«. Osim gore opisanih skala A, B, C i D ovo računalo ima na svojoj prednjoj strani još tri skale. To su skale označene na slici 5 slovima K, R i L.* Skale K i L leže na štapu, dok se skala R nalzi na jeziku. Skala K je najgornja skala štapa, ona sadrži tri logaritamske jedinice i služi za kubiranje, odnosno za određivanje trećega korijena. Skala L najdonja je skala štapa, pomoću nje logaritmiramo, odnosno antilogaritmiramo. Konačno, skala R nanesena u sredini jezika služi za određivanje recipročnih vrijednosti. Prema tome takvo računalo omogućuje izvođenje ovih devet operacija: množenje, dijeljenje, kvadriranje, kubiranje, vađenje drugog i trećeg korijena, logaritmiranje, antilogaritmiranje i određivanje recipročnih vrijednosti.



Sl. 5.

3.3. Skale na stražnjoj strani jezika

Tehnički računi traže često osim izvođenja navedenih operacija još i određivanje prirodnih vrijednosti goniometrijskih funkcija, tj. sinusa, kosinusa, tangensa i kotangensa. Za tu svrhu imaju obično

* Preporučuje se početniku da nanese na svoje računalo sve gore navedene oznake pojedinih skala.

računala na stražnjoj strani jezika logaritamske skale za funkcije sinus i tangens. Pomoću tih skala mogu se odrediti i prirodne vrijednosti kosinusa i kontangensa, ako se uzmu u obzir poznate formule prijelaza od jedne goniometrijske funkcije na drugu, o čemu će kasnije biti govora.

Neka računala, npr. računalo prikazano na slici 5, imaju na stražnjoj strani jezika tri trigonometrijske skale označene slovima S, T, S & T. Srednja skala S & T služi za određivanje prirodnih vrijednosti sinusa i tangensa malih kutova, gornja skala S za određivanje vrijednosti sinusa, a donja skala T za određivanje vrijednosti tangensa većih kutova.

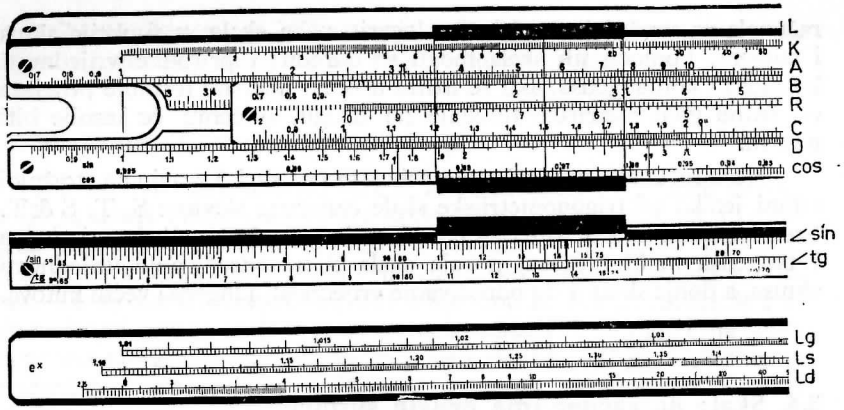
3.4. Skale na računalima drugih sustava

Računala drugih sustava imaju obično na stražnjoj strani jezika samo dvije trigonometrijske skale S i T, dok se u sredini nalazi skala L za logaritmiranje. Kubna skala K smještena je kod tih računala na prednjem rubu štapa, a najgornja i najdonja skala prednje strane računala su takozvane log-log-skale »Ls« i »Ld« koje služe za određivanje potencije (vidi sliku 43).

3.5. Skale na računalu sustava »Darmstadt«

Logaritamska računala toga sustava najnovija su i najsavršenija računala, osobito podesna za tehničke račune. Ta računala imaju nešto drukčiji poredaj skala. Dok su skale A, B, C, D, K i R smještene na istim mjestima štapa i jezika kao kod računala sustava »Rietz«, skala za logaritmiranje L nalazi se na zadnjem rubu štapa. Trigonometrijske skale S i T, koje su na ovim računalima označene sa »$\angle$ sin« i »$\angle$ tg«, smještene su na prednjem rubu štapa (vidi sliku 6).

Za određivanje općenite potencije služe tri skale »Lg«, »Ls« i »Ld« na stražnjoj strani jezika, koje zajedno čine tzv. logaritamsku skalu logaritama ili kraće log-log-skalu. Osim toga računala tog sustava imaju još jednu skalu koju nemaju računala ni jednog drugog sustava. To je najdonja skala štapa označene sa »cos« ili »$\sqrt{1 - x^2}$«. Ona sadržava prirodne vrijednosti funkcije kosinusa, odnosno vrijednosti $\sqrt{1 - x^2}$, gdje je x uzet na donjoj skali D štapa.



Sl. 6.

4. O POLOŽAJU DECIMALNOG ZAREZA

Poznato nam je da logaritamske tablice sadrže samo mantise logaritama, a ne daju karakteristike, koje ovise samo o položaju decimalnog zareza numerusa.

Analogno tome i pri *računanju logaritamskim računalom, čije su skale logaritamske skale, ne dobiva se položaj decimalnog zareza iz samog računala,* već se taj položaj određuje ili po smislu ili na temelju posebnih pravila o kojima će biti govora kasnije. Zbog toga skale logaritamskoga računala imaju svoju posebnu oznaku. Npr. nadesno od početne jedinice skale D (vidi sliku 2) ne piše se kadšto 1,1; 1,2; 1,3 itd. već 1, 2, 3... Zbog istog razloga konačne crte skala računala često nisu označene sa 10, već sa 1 (vidi sliku 2).

Prema tome se *preporučuje da se brojevi koji se imaju postaviti, odnosno očitati na računalu, čitaju bez obzira na položaj decimalnog zareza.*

Čitat ćemo, dakle, npr. kod 35,6 ne »trideset pet cijelih šest« već »tri, pet, šest«, a kod 0,005 ili 50000 naprosto »pet« itd.

Iz toga vidimo da pri izvođenju množenja i dijeljenja pomoću logaritamskoga računala položaj decimalnog zareza u brojevima s kojima operiramo ima važnost tek za određivanje položaja decimalnog zareza u rezultatu, kad je dotična operacija već na računalu izvršena. Prije smo npr. izračunali pomoću računala produkt 2 · 3. Tačno na

istim crticama skala C i D računala računat ćemo i produkte 0,2 · 0,3; 200 · 30; 0,00002 · 300 itd. jer svaki od ovih produkata ima za računalo iste faktore 2 i 3. Analogno ćemo na istim crtama skala C i D računala odrediti kvocijente 8 : 4; 0,8 : 0,4; 80000 : 400 itd.

Sada nam je također jasno zašto nema smisla nanositi na skalama C i D njihov nastavak, kako bi se uhvatili brojevi između 10 i 100, 100 i 1000 itd. ili brojevi između 1 i 0,1; 0,1 i 0,01 itd. Sve ove brojeve možemo naći na skalama računala. Samo počeci ovih nastavaka naneseni su kadšto na računalu crvenom bojom (vidi sl. 5 i 6.)

5. UVJETI ZA BRZO I SIGURNO RAČUNANJE

Brzo i sigurno računanje logaritamskim računalom pretpostavlja:

1. poznavanje gore navedenoga načela računala i
2. dovoljno vježbanje računalom.

O ovom posljednjem mora se kazati nekoliko riječi. *C. Runge,* jedan od prvih stručnjaka primijenjene matematike, rekao je u jednom od svojih djela da još nitko nije naučio svirati klavir gledajući samo u note. To se može potpuno primijeniti i na logaritamsko računalo. Kao što svaka sprava, tako i logaritamsko računalo traži marljivo vježbanje ako se želi brzo i sigurno računati. Vrijeme utrošeno na ove vježbe nije izgubljeno vrijeme, već je glavnica uložena uz visoke kamate, koju ćemo u obliku ušteđenoga radnog vremena uživati čitav život.

Neznatne teškoće na koje će naići početnik lako će ukloniti svatko tko ima čvrstu volju da za sve račune, čija tražena tačnost ne premašuje tačnosti koju nam daje naša sprava, odbaci papir i olovku i lati se modernog pomagala — logaritamskog računala.

6. POSTAVLJANJE I OČITAVANJE BROJEVA NA SKALAMA RAČUNALA

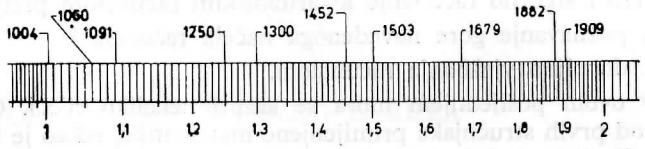
Pri vježbanju logaritamskim računalom prvi je uvjet — potpuna sigurnost u postavljanju i očitavanju brojeva na skalama računala. Za tu svrhu *apsolutno je potrebno da se najprije zna broj koji odgovara svakoj diobenoj crti skala, te da se mogu vršiti postavljanja ili očitavanja i između crta razdiobe.* Sve ovo zahtijeva precizno poznavanje skala.

6.1. Skale C i D

Uzmimo u ruke logaritamsko računalo i promotrimo najprije skalu C jezika i njoj identičnu skalu D štapa (vidi slike 2, 5 i 6).

6.1.1. Razmak »1« do »2«

Pažljivo promatranje ovih skala pokazuje da su između »1« i »2« unesene i numerirane i desetine, a između njih opet da su označene stotine. Kako se između stotina mogu opet nakon neznatna vježbanja uvrstiti pomoću crte kazaljke i tisućine, može se na ovom dijelu skala C i D računati sa četiri mjesta. Sl. 7 prikazuje u povećanom obliku razmak »1« do »2« skale D ili C.



Sl. 7.

Prema tome, ako na skali C ili D počevši od »1« očitavamo redom sve diobene crte, čitat ćemo: 1—0—0—0, 1—0—1—0, 1—0—2—0, 1—0—3—0, 1—0—4—0, 1—0—5—0, ..., 1—0—9—0, 1—1—0—0, 1—1—1—0, 1—1—2—0 i tako dalje do 1—9—9—0, 2—0—0—0, a ako postavimo opet počevši od »1« pomoću crte kazaljke (ako kazaljka ima tri crte, uvijek se upotrebljava srednja — *glavna crta*) tačno sredine razmaka između diobenih crta, čitat ćemo: 1—0—0—5, 1—0—1—5, 1—0—2—5, ..., 1—0—9—5, 1—1—0—5, 1—1—1—5, itd. do 1—9—8—5, 1—9—9—5.

Radi vježbe postavimo pomoću srednje crte kazaljke na donjoj skali D štapa ili na donjoj skali C jezika slijedeće brojeve, razumije se bez obzira na položaj decimalnog zareza:

1,004, 10,60, 0,1091, 1250, 13,00, 0,001452, 0,1503, 0,01679, 188,2, 1909, tj.

1. jedan — nula — nula — četiri (1—0—0—4)
2. jedan — nula — šest — nula (1—0—6—0)
3. jedan — nula — devet — jedan (1—0—9—1) itd.

Slika 7 prikazuje pravilni položaj tih brojeva na skali D ili C.

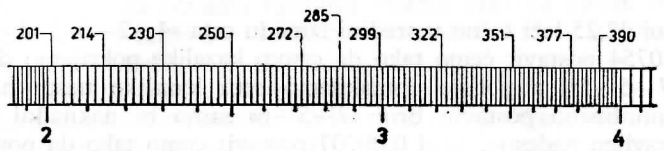
Stavimo sada crtu kazaljke sasvim po volji između »1« i »2« istih skala C i D i vježbajmo očitavanje tako postavljenih brojeva.

Vidimo: *svi brojevi kojima je prva znamenka, različita od nule, jednaka* »1«, *leže u razmaku* »1« *do* »2«. *Od tih brojeva možemo tačno postaviti, odnosno očitati tri prve znamenke, a četvrtu ocijeniti.* Prema tome broj čija je prva znamenka »1«, a ima više od četiri znamenke, moramo pri postavljanju zaokružiti na četiri znamenke, uvodeći potrebnu korekciju povećanjem njegove četvrte znamenke za jedinicu, ako je peta znamenka 5 ili veća od 5. Npr. ako imamo da postavimo brojeve: 135856; 0,0189135; 10,208 postavit ćemo: 1—3—5—9; 1—8—9—1; 1—0—2—1.

6.1.2. Razmaci »2« do »3« i »3« do »4«

Osobitu ćemo pažnju posvetiti razmacima od »2« do »3« i od »3« do »4« jer tu se pri upotrebi najviše griješi. Svaki od ovih razmaka podijeljen je na desetine, a svaka desetina podijeljena je ne na 10, već na 5 dijelova (vidi sliku 8). Prema tome ako počevši od »2« stavimo crtu kazaljke redom na sve crte ovih razmaka čitat ćemo: 2—0—0; 2—0—2; 2—0—4, ...; 2—1—0; 2—1—2; itd. do 3—9—8; 4—0—0; a ako stavimo crtu kazaljke opet počevši od »2« tačno u sredinu između diobenih crta, čitat ćemo po redu: 2—0—1; 2—0—3; 2—0—5; .....; 2—1—1; 2—1—3 itd. do 3—9—7; 3—9—9. Radi vježbanja postavimo crtom kazaljke:

20,1; 0,214, 230, 0,250, 0,0272, 28,5, 0,000299, 0,322, 3,51, 377. 3,90.



Sl. 8.

Njihov položaj prikazan je na slici 8.

Vježbajmo se postavljati i očitavati brojeve na ovom dijelu skala!

Vidimo: *svi brojevi kojima je prva znamenka, što je različita od nule, jednaka* »2«, *odnosno* »3«, *pripadaju razmaku* »2« *do* »3«, *odnosno razmaku* »3« *do* »4«. *Od ovih brojeva možemo tačno postaviti odnosno očitati dvije ili tri znamenke.* Ocjena četvrte znamenke već je dosta nesigurna. Prema tome one od tih brojeva, koji imaju više od tri znamenke, moramo pri postavljanju zaokružiti na tri znamenke korigirajući, kako je gore rečeno, treću znamenku.

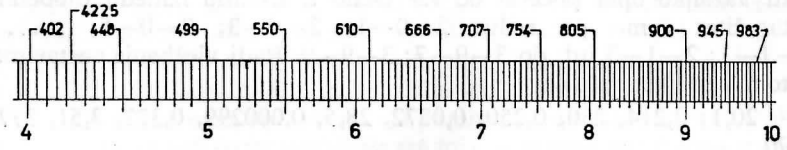
6.1.3. Ostali razmaci između »4« i »10«

Dalje od »4« sve do kraja skala C i D koje promatramo, urisane su između desetina samo još polovine (slika 9). Prema tome iza »4« čitat ćemo po redu:

4—0—0; 4—0—5; 4—1—0; 4—1—5; itd. do 9—9—5; 4—2—0; 1—0—0—0. Ostale stotine mogu se samo odoka uvrstiti.

Radi vježbanja stavimo crtu kazaljke na slijedeće brojeve kojih je položaj prikazan na slici 9:

4,02, 42,25, 0,448, 0,499, 550, 0,0610, 0,666, 0,00707, 0,0754, 8,05, 900, 9,45, 0,000983.



Sl. 9.

Broj 42,25 leži tačno u sredini između crta »4—2—0« i »4—2—5«. Broj 0,0754 postavit ćemo tako da crtom kazaljke pokrijemo diobenu crtu »7—5—5«, a poslije pomaknemo crtu kazaljke nešto nalijevo, Analogno bismo postavili broj »7—5—6« samo bi naknadni pomak bio upravljen nadesno. Broj 0,00707 postavit ćemo tako da postavimo prvo »7—0—7—5« (leži u sredini diobenih crtica »7—0—5« i »7—1—0«), pa onda crtu kazaljke pomaknemo nešto nalijevo. Analogno bi se postavio, ali uz neznatan pomak nadesno, broj »7—0—8«.

Vidimo: *u ovom dijelu skala* C *i* D *možemo tačno postaviti, odnosno očitati, samo dvije znamenke, dok se već treća obično ocjenjuje.*

I u ovom slučaju moramo dakle broj koji imamo postaviti, zaokružiti na tri znamenke, ako ih ima više, korigirajući ga; ako je pri tome, četvrta korigirana znamenka »5«, zaokružimo obično na četiri znamenke.

Proučavanje skala C *i* D *računala pokazuje da se na tim skalama radi općenito s tri znamenke, dok razmak* »1« *do* »2« *daje četiri znamenke.*

6.1.4. Praktične napomene

1. Gotovo jedina i ujedno najveća teškoća za svakog početnika je postavljanje, odnosno očitavanje brojeva na skalama računala, stoga treba da se tom poglavlju posveti osobita pažnja.

2. Pri postavljanju kakvoga bilo broja uočit ćemo najprije njegovu prvu znamenku različitu od nule. Ta znemenka pokazuje razmak skale u koji pada naš broj; npr. broj 0,003678 pada u razmak »3« do »4«, broj 51,37 pada u razmak »5« do »6« itd. Analogno pri očitavanju uočit ćemo najprije razmak u kojem leži dotična tačka skale. Broj kojim je obilježen lijevi kraj ovoga razmaka prva je znamenka traženog broja (pazi: na donjim skalama C i D razmak od »1« do »2« ima numerirane desetine; svaki broj koji leži u tom razmaku ima prvu znamenku »1«!).

3. Najviše se griješi pri postavljanju onih brojeva koji imaju nulu iza prve znamenke različite od nule, npr. 1056, 8,06; 0,0307. Ova se nula često izostavlja pa se pogrešno postavljaju umjesto »1—0——5—6«, »8—0—6«, »3—0—7« slijedeći brojevi: »1—5—6—0«, »8—6—0«, »3—7—0«. Stoga treba osobito vježbati razlikovanje takvih brojeva.

4. Čitanja na skalama računala vršimo tako da uvijek očitavamo sve tri, odnosno četiri znamenke, pa i u slučaju kad su posljednje znamenke nule i nemaju značenja za numeričku vrijednost rezultata. Npr. neka je 0,2 rezultat neke računske operacije izvršene na računalu; ipak ćemo za rezultat pisati 0,200, jer time pokazujemo da smo računali, na tri znamenke tačno, a ne na jednu.

5. Treba se vježbati u brzoj i sigurnoj ocjeni dijelova razmaka između dvije susjedne diobene crte pri postavljanju, odnosno očitavanja brojeva koji nisu označeni na skali posebnom crtom razdiobe. Nakon kratkoga vježbanja postizava se potrebna sigurnost i vidi se da ocjena nije tako teška kako izgleda u prvi mah.

6.2. Skale A i B

Prelazimo sada na proučavanje skala A i B (slike 2, 5 i 6). Svaka skala ovoga para identičnih skala sastoji se od dva jednaka dijela, jer sadrži dvije logaritamske jedinice. Prema tome parovi skala A, B i C, D razlikuju se i u broju nanesenih crta i u mjerilu: ono je kod skala A i B tačno dva puta manje nego kod skala C i D. Zbog tog razloga postavljanje i očitavanje brojeva na skalama A i B bit će dva puta manje tačno nego na skalama C i D.

Na skalama A i B odgovara razdioba između »1« i »2« razdiobi »2« i »4« na skalama C i D, tj. najmanji diobeni razmak ima tu vrijednost od dvije jedinice trećeg mjesta, a razdioba između »2« i »5« odgovara razdiobi između »4« i »10«. Konačno ostatak skala A i B nosi još jednostavniju razdiobu: tu su označene samo desetine.

Vježbajmo se postavljati i očitavati brojeve na skalama A i B.

Vidimo: *na skalama A i B mogu se na svakome mjestu postaviti, odnosno očitati tri znamenke.*

6.3. Skale K, R i L

Tačno i sigurno poznavanje gore navedenih skala A, B, C i D logaritamskoga računala čini suvišnim upute za postavljanje, odnosno očitavanje brojeva na skalama K, R i L (slike 5 i 6).

6.4. Skale S, S & T, T i dr.

Što se tiče postavljanja, odnosno očitavanja na skalama trigonometrijskih funkcija, tj. na skalama S, S & T, T, $\angle$ tg i $\angle$ sin, o tome će biti govora kasnije. Također će se kasnije dati upute za postavljanja i čitanja na skalama cos, Lg, Ls i Ld.

7. TAČNOST LOGARITAMSKOG RAČUNALA

Proučavanje skala logaritamskog računala pokazalo nam je da je tačnost ove sprave ograničena, jer se logaritamskim računalom može raditi općenito samo na tri mjesta.

Nastaje dakle pitanje: koja se tačnost smije očekivati od rezultata neke računske operacije izvršene pomoću logaritamskoga računala? Da odgovorimo na ovo pitanje uzmimo da se ne računa baš s onim brojevima kojima na računalu odgovaraju diobene crte, i držimo na

umu da se logaritamskim računalom radi bez obzira na položaj decimalnog zareza.

Upotreba računala traži pravilnu ocjenu razmaka. Najmanji razmak koji naše oko još može da ocijeni na računalu iznosi 0,1 mm. Prema tome pri postavljanju ili očitanju jednog broja treba očekivati grešku u dužini od 0,1 mm. Znamo već da su skale računala funkcijske skale za logaritamsku funkciju $y = \log x$ i da donje skale C i D računala sadržavaju po jednu logaritamsku jedinicu dugu 25 cm. Ako dakle računamo na ovim skalama, odgovarat će vrijednosti $y = 1$ dužina od 250 mm.

Ako sada označimo s Δy grešku u y koja bi odgovarala greški od 0,1 mm u dužini dobit ćemo:

$$\Delta y = \frac{0{,}1}{250} = \frac{1}{2500}$$

jer bi greški od 250 mm odgovarala u y-u greška 1, a greški od 0,1 mm odgovarala bi u y greška Δy, odakle imamo omjer:

$$\frac{\Delta y}{1} = \frac{0{,}1}{250}$$

Sada se pita, koja greška u x nazivamo je Δx odgovara ovoj greški Δy, tj. kolika je greška postavljanja, odnosno očitanja jednog broja na logaritamskom računalu. Ako diferenciramo po x izraz $y = \log x$ imat ćemo:

$$\mathrm{d}y = \frac{M}{y} \cdot \mathrm{d}y$$

gdje je $M = \log e = 0{,}43429$ — modul Briggsovih logaritama. Gornji izraz vrijedi približno i za male konačne razlike Δx i Δy.

Imamo dakle:

$$\Delta y = \frac{0{,}434}{x} \Delta x$$

a odatle:

$$\Delta x = \frac{\Delta y}{0{,}434}\, x$$

Gore smo izračunali da je $\Delta y = \frac{1}{2500}$; uvrstivši imamo:

$$\Delta x = \frac{1}{2500 \cdot 0{,}424}\, x$$

ili

$$\Delta x = 0{,}00092\ x$$

0,00092 približno je jednako 0,001, tj. 0,1% ili 1‰. Imamo dakle:

$$\Delta x = 0{,}1\%\ x$$

$$\frac{\Delta x}{x} = 0{,}1\% \qquad \text{tj.}$$

greška postavljanja, odnosno očitanja jednoga broja na logaritamskom računalu iznosi samo oko 0,1%, *tj.* 1 ‰ *ovoga broja te mu je razmjerna, ali procentualno uvijek ista bez obzira na njegovu veličinu.* To je karakteristično svojstvo logaritamske skale.

Uzmimo nekoliko primjera

Broj x koji se ima postaviti, odnosno očitati na log. računalu	Greška postavljanja odnosno očitanja $\Delta x = 0{,}1\%\ x$	Ista greška izražena u jedinicama četvrtoga mjesta
1018	1,018	1
1924	1,924	2
2037	2,037	2
2933	2,933	3
3826	3,826	4
4507	4,507	5
5167	5,167	5
7318	7,318	7
9503	9,503	10
9917	9,917	10

Vidimo: *Na donjim skalama* C *i* D *računala od* 1000 *do* 4500 *sigurne su tri znamenke, a dalje samo dvije, no procentualna greška od* 1 ‰ *ostaje uvijek ista.*

Kad smo odredili grešku jednoga postavljanja, odnosno očitanja, možemo dati odgovor na osnovno pitanje: koja se tačnost smije očekivati od rezultata neke računske operacije izvršene logaritamskim računalom?

Kako smo vidjeli, rezultat množenja ili dijeljenja dvaju brojeva dobiva se pri upotrebi logaritamskoga računala nakon dvostrukoga postavljanja i jednostrukoga očitanja, tj. gore određena greška u ocjeni dolazi u obzir tri puta. Teorija računa izjednačenja dokazuje da srednja greška rezultata dobivena iz n mjerenja iznosi $m\sqrt{n}$, gdje je m srednja greška jednog mjerenja.

Prema tome srednja greška jednostrukog množenja ili dijeljenja iznosi:

$$0{,}00092\sqrt{3} = 0{,}00159 = \text{pribl. } 0{,}15\% \text{ ili } 1{,}5\text{‰, tj.}$$

rezultat množenja ili dijeljenja dvaju brojeva dobiven na donjim skalama C *i* D *računala nije poprečno siguran za nekih* 1,5 ‰ *svoje vrijednosti.*

Obje gornje skale A i B računala imaju, kako je već rečeno, dva puta manju tačnost. Prema tome rezultat jednostrukog množenja ili dijeljenja pri računanju na ovim skalama ima srednju grešku od nekih 3 ‰ svoje vrijednosti.

8. RAČUNANJE VEĆOM TAČNOŠĆU

Traži li se npr. za opseg O kruga kome je promjer $d = 7{,}856$ m veća tačnost nego je daje logaritamsko računalo, postupat ćemo tako da početak te operacije izvršimo običnim putom, tj. bez računala, a računanje nastavimo logaritamskim računalom, kad njegova tačnost bude dovoljna.

Traži se npr. opseg O kruga kome je promjer $d = 7{,}856$ m i to s tačnošću do 1 mm.

Znamo: $O = \pi \cdot d = 3{,}1416 \cdot 7{,}856$.

Neposredno računanje ovoga produkta na logaritamskom računalu daje samo tri znamenke rezultata, tj. imamo: $O = 24{,}7$ m; da dobijemo u rezultatu cm i mm rastavimo u gornjem iznosu π na dva djiela: $\pi = 3{,}1416 = 3 + 0{,}1416$; dobijemo:

$$O = (3 + 0{,}1416) \cdot 7{,}856 = 3 \cdot 7{,}856 + 0{,}1416 \cdot 7{,}856$$

Prvi produkt izračunajmo bez računala, a drugi pomoću računala. Oba dobivena produkta zbrojimo:

$$3 \cdot 7{,}856 = 23{,}568$$
$$0{,}1416 \cdot 7{,}856 = \ 1{,}112$$
$$O = 24{,}680 \text{ m}$$

U ovom su rezultatu i mm tačni.

Analogno se postupa kad se od kvocijenta dvaju brojeva traži veća tačnost od one koju neposredno daje logaritamsko računalo.

9. »BROJ MJESTA« BROJEVA

Rekli smo već da računanje logaritamskim računalom ne daje neposredno položaj decimalnog zareza u rezultatu i da se taj položaj određuje ili po smislu ili na temelju posebnih pravila. Određivanje položaja decimalnog zareza po smislu traži kod kompliciranih operacija velik napor, a prema tome umara i oduzima vrijeme. Da se mehanički odredi položaj decimalnog zareza u rezultatu svake računske operacije, navest ćemo kasnije posebna jednostavna pravila za to, a sada ćemo rastumačiti šta se razumijeva pod »brojem mjesta« nekog broja uzetog po volji.

Pod »brojem mjesta« brojeva većih od 1, tj. cijelih brojeva ili nepravih decimalnih razlomaka, razumije se broj znamenaka u njihovom cijelom dijelu, tj. lijevo od decimalnog zareza, a »broj mjesta« brojeva manjih od 1, tj. pravih decimalnih razlomaka, je broj nula desno od decimalnog zareza uzet s negativnim predznakom.

Prema tome broj	1385	ima broj	mjesta		4
„	25	„	„	„	2
„	185,65	„	„	„	3
„	100,82	„	„	„	3
„	0,3567	„	„	„	0
„	0,0506	„	„	„	−1
„	0,00137	„	„	„	−2
„	0,000012	„	„	„	−4
„	$10 = 10^1$	„	„	„	1
„	$100 = 10^2$	„	„	„	2
„	$0{,}001 = 10^{-3}$	„	„	„	−3 itd.

Pokazat ćemo sad, kako se logaritamskim računalom izvode pojedine računske operacije.

10. MNOŽENJE

10.1. Produkt dvaju faktora

10.1.1. Računanje

Traži se produkt dvaju brojeva: $a \cdot b = p$

Logaritmirajmo ovaj izraz:

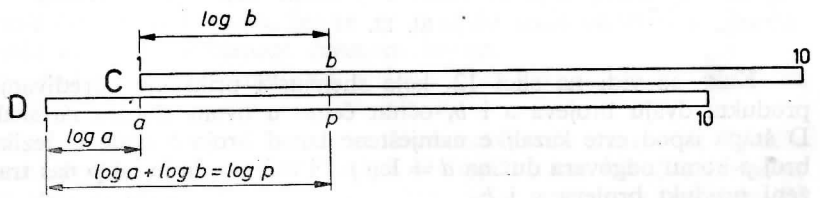
$$\log a + \log b = \log p$$

odatle:

$$p = a \cdot b = \text{numerus } (\log a + \log b), \text{ tj.}$$

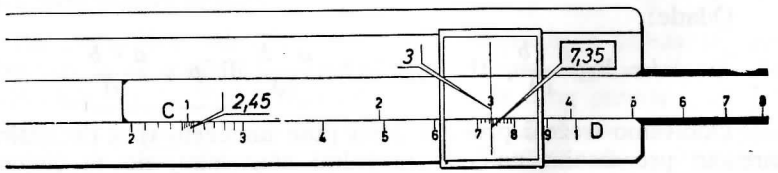
produkt dvaju brojeva dobiva se tako da se zbroje dužine uzete na skali štapa i na skali jezika, koje odgovaraju ovim brojevima.

Slika 10 tumači ovo pravilo.



Sl. 10.

Primjer: $2{,}45 \cdot 3 = 7{,}35$ (sl. 11).



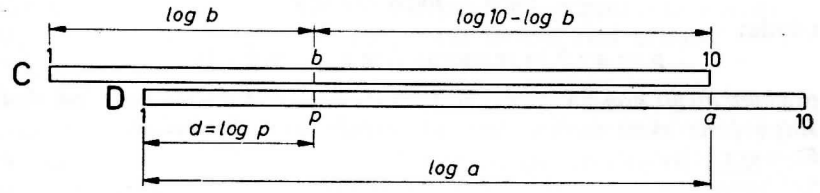
Sl. 11.

Stavimo početnu crtu donje skale C jezika iznad »2—4—5« donje skale D štapa, namjestimo crtu kazaljke iznad »3« donje skale C jezika, a produkt »7—3—5« očitamo ispod crte kazaljke na skali D štapa.

Vježbajmo se:

$1{,}35 \cdot 5{,}5 = 7{,}425$
$21{,}3 \cdot 1{,}355 = 28{,}9$
$6{,}08 \cdot 14{,}05 = 85{,}4$
$30{,}5 \cdot 3{,}04 = 92{,}7$
$0{,}0703 \cdot 1{,}181 = 0{,}0830$ itd.

U svim gore navedenim primjerima produkt prvih znamenaka u faktorima bio je manji od 10. Ako je taj produkt veći od 10, kao npr. kod produkta: $7{,}5 \cdot 4{,}8$, pa ako prema gornjem namjestimo početnu crtu skale C iznad »7—5« donje skale D štapa, nećemo moći ispod »4—8« skale C očitati produkt, jer će taj dio jezika ležati sasvim izvan štapa. U tom slučaju moramo iznad prvoga faktora namjestiti ne početnu crtu skale C, već *konačnu* crtu ove skale. Dalje radimo kao i prije.



Sl. 12.

Kako se vidi na slici 12, koja shematski prikazuje određivanje produkta dvaju brojeva a i b, očitat ćemo u ovom slučaju na skali D štapa ispod crte kazaljke namještene iznad broja b skale C jezika broj p komu odgovara dužina $d = \log p$. Tvrdimo da je taj p naš traženi produkt brojeva a i b.

Na slici vidimo:

$$d = \log a - (\log 10 - \log b) = \log a + \log b - \log 10.$$

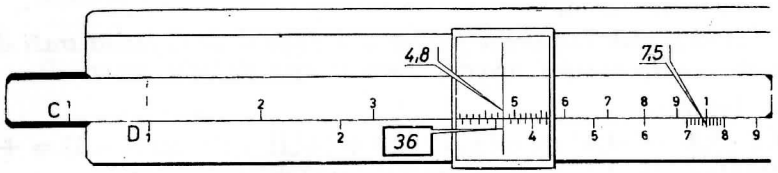
Odatle:

$$d = \log \frac{a \cdot b}{10}, \text{ tj. } \log p = \log \frac{a \cdot b}{10} \text{ ili } p = \frac{a \cdot b}{10}.$$

Dobivamo traženi produkt deset puta umanjen, tj. s decimalnim zarezom prenesenim nalijevo za jednu znamenku, no ta činjenica nema važnosti jer nam računalo ne daje uopće položaj decimalnog

zareza. Prema tome je sasvim svejedno upotrebljavamo li pri računanju produkta početnu ili konačnu crtu jezika.

Vratimo se na naš primjer: $7{,}5 \cdot 4{,}8 = 36$ (slika 13).



Sl. 13.

Stavimo konačnu crtu skale C jezika iznad prvog faktora »7—5« na skali D štapa, namjestimo crtu kazaljke iznad drugoga faktora »4—8« na skali C jezika, a produkt »3—6« očitamo ispred crte kazaljke na skali D štapa.

Vježbajmo se:

$5{,}05 \cdot 0{,}223 = 1{,}126$
$0{,}652 \cdot 1{,}895 = 1{,}236$
$0{,}305 \cdot 0{,}755 = 0{,}230$
$725 \cdot 32 = 23200$
$2{,}21 \cdot 4{,}75 = 10{,}50$ itd.

Zadnji se produkt može izračunati također postavljanjem početne crte skale C štapa, jer se taj produkt dade očitati i na produženju skale D nanesenom crvenom bojom.

Sad možemo formulirati općenito pravilo za izračunavanje na skalama C i D produkta dvaju faktora:

Stavimo početnu ili, ako to ne ide, konačnu crtu donje skale C *jezika iznad prvog faktora na donjoj skali* D *štapa, crtom kazaljke označimo na skali* C *jezika drugi faktor, a ispod tako namještene crte kazaljke očitamo na skali* D *štapa traženi produkt.*

10.1.2. Broj mjesta produkta

Za mehaničko određivanje položaja decimalnog zareza u produktu nalazi se kadšto u donjem desnom kutu štapa znak »P—1«, tj. »Produkt — 1«. Svrha toga znaka izlazi iz ovog pravila:

Broj mjesta u produktu općenito je jednak algebarskoj sumi brojeva mjesta obaju faktora, ali ako se iznad prvoga faktora stavi početna crta donje skale C *jezika, tj. ako se traženi produkt očitava nadesno od prvog*

faktora, mora se ovoj algebarskoj sumi dodati »— 1«, na što upućuje znak »P—1«, smješten u desnom kutu štapa. Pri upotrebi konačne crte jezika, odnosno pri očitanju produkta nalijevo od prvoga faktora, dodatka nema.

Pamtimo dakle:

Kod produkta upotreba početne crte donje skale C jezika traži dodatak »— 1«, dok pri upotrebi konačne crte dodatka nema.

Primjeri:

$36{,}5 \cdot 2{,}31 = 84{,}3$ broj mjesta $(+2) + (+1)$ + dodatak $(-1) = +2$

$0{,}00705 \cdot 593 = 4{,}18$; broj mjesta: $(-2) + (+3) = +1$

$0{,}000343 \cdot 0{,}0443 = 0{,}00001519$; broj mjesta: $(-3) + (-1) = -4$

$0{,}00201 \cdot 352 = 0{,}708$; broj mjesta: $(-2) + (+3)$ + dodatak $(-1) = 0$

$0{,}23092 \cdot 0{,}001005 = 0{,}000232$; broj mjesta: $(0) + (-2)$ + dodatak $(-1) = -3$

$157500 \cdot 403 = 63500000$; broj mjesta: $(+6) + (+3)$ + dodatak $(-1) = +8$

$0{,}341 \cdot 0{,}604 = 0{,}206$; broj mjesta: $(0) + (0) = 0$

$\pi \cdot 1{,}605 = 5{,}04$; broj mjesta: $(+1) + (+1)$ + dodatak $(-1) = +1$

itd.

Obratimo pažnju na to da je broj $\pi = \dfrac{\text{opseg kruga}}{\text{promjer kruga}} = 3{,}14159$ označen na skalama računala posebnom crticom i znakom π.

Preporučuje se često vježbanje računanja produkata s faktorima uzetim po volji. Kontrola dobivenih rezultata najbolje se vrši tako da se isti produkti računaju još jednom logaritamskim putom, logaritmirajući pomoću skale L računala, koja nam daje mantise logaritama brojeva uzetih na skali D štapa (slike 5, 6, 34 i 35).

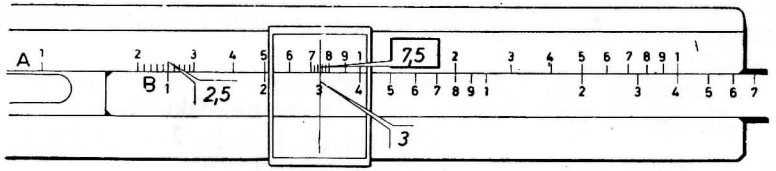
Stoga se preporučuje da se odmah nauči logaritmiranje pomoću računala (vidi dalje 16). Taj način kontrole koristan je zato jer se kontrola rezultata dobije uz veliku uštedu vremena, a osim toga sama kontrola vježbanje je upotrebe računala.

10.1.3 Računanje produkata na skalama A i B

Računanje produkta može se vršiti i na gornjim skalama A i B računala (slike 2, 5 i 6). Postupak ostaje isti. Razlika je samo u tome da ćemo uvijek moći upotrebiti početnu crtu gornje skale B jezika, jer ovaj par skala sadrži po dvije logaritamske jedinice. I uz ove koristi produkt se ipak obično računa na skalama C i D zbog dva puta veće tačnosti ovih skala.

Primjer za računanje produkta na skalama A i B:

$2{,}5 \cdot 3$ (slika 14)



Sl. 14.

Stavimo početnu crtu gornje skale B jezika ispod prvoga faktora »2 — 5« na gornjoj skali A štapa, namjestimo crtu kazaljke iznad drugog faktora »3« na gornjoj skali B jezika, pa traženi produkt »7 — 5« očitamo ispod crte kazaljke na skali A štapa.

Radi vježbanja izračunajmo još jednom gore navedene primjere, ali sada na gornjim skalama A i B.

Uspoređivanje dobivenih rezultata s prijašnjim pokazat će odmah manju tačnost računanja na gornjim skalama računala.

10.2. Produkt od više faktora

Produkt od više faktora $a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e$ računa se po istom pravilu kao i produkt od dva faktora. Pojedini se djelomični produkti naravno ne očitavaju.

Da mehanički odredimo položaj decimalnog zareza u rezultatu bilježimo »— 1« kod svakog postavljanja početne crte donje skale C jezika.

Broj mjesta produkta od više faktora jednak je algebarskoj sumi brojeva mjesta pojedinih faktora, plus zbroj zabilježenih »— 1«.

Primjer:

$$0{,}01823 \cdot 2{,}05 \cdot 0{,}000321 \cdot 68{,}5 = 0{,}000822$$

Stavimo početnu crtu donje skale C jezika iznad prvog faktora »1—8—2—3« donje skale D štapa, te odmah zabilježimo »— 1«, jer smo upotrebili početnu crtu skale C. Sada namjestimo crtu kazaljke iznad drugog faktora »2—0—5« skale C. Ispod crte kazaljke leži na skali D produkt ovih faktora. Mi ga ne očitavamo, već ga odmah množimo slijedećim faktorom »3—2—1«. Za tu svrhu pod crtu kazaljke stavimo konačnu crtu skale C jezika. Pribilješke nemamo, jer smo upotrebili *konačnu* crtu skale C. Crtu kazaljke namjestimo iznad trećeg

faktora »3—2—1« skale C. Sad ispod crte kazaljke leži na skali D produkt od tri faktora. Opet ga ne očitavamo, već ga dalje množimo četvrtim faktorom »6—8—5«. Stoga ispod crte kazaljke namjestimo početnu crtu skale C jezika zabilježivši »— 1« te crtu kazaljke stavimo na »6—8—5« skale C. Ispod crte kazaljke leži na skali D tražena vrijednost produkta »8—2—2«.

Računajmo sada broj mjesta produkta.

Algebarska suma brojeva mjesta pojedinih faktora:

$$(-1)+(+1)+(-3)+(+2)=-1$$

Zbroj zabilježenih »— 1« . . . . . — 2

Broj mjesta produkta . . . . . — 3

Traženi produkt: 0,000822.

Vježbajmo se:

$$45{,}3 \cdot 0{,}1036 \cdot 15{,}21 \cdot 0{,}00238 \cdot 5{,}439 = 0{,}925.$$

Broj mjesta produkta: $(+2)+(0)+(+2)+(-2)+(+1)+(-3)=0$

$$0{,}0908 \cdot 14{,}03 \cdot 0{,}283 \cdot 91{,}5 \cdot 3{,}14159 = 103{,}6$$

Broj mjesta: $(-1)+(+2)+(0)+(+2)+(+1)+(-1)=+3$

itd.

10.3. Nastavci skala logaritamskog računala

Na novijim su računalima osnovne skale A, B, C i D, a kadšto i skala recipročnih vrijednosti R, nešto produžene na oba kraja. Ovi su nastavci skala obično naneseni crvenom bojom (slike 5 i 6).

Na nastavcima se skala radi tačno na isti način kao i na samim skalama.

Ovi su nastavci često vrlo zgodni, naročito onda kad pri računanju traženi rezultat pada nešto izvan skale.

Računamo li npr. 10,45 · 0,0975 tako da iznad prvog faktora »1—0—4—5« dlnje skale D štapa stavimo *početnu* crtu donje skale C jezika, past će drugi faktor (9—7—5«, uzet na skali C, izvan skale D. Ipak možemo da očitamo traženi produkt »1—0—1—9« na produženju skale D.

Pri mehaničkom određivanju položaja decimalne tačke u rezultatu moramo gledati koju bismo crtu skale C, početnu ili konačnu, upotrebili da smo radili bez nastavaka skala.

U našem bi slučaju to bila *konačna crta*, dakle: dodatka nema te broj mjesta produkta iznosi $(+2)+(-1)=+1$, a rezultat glasi: 1,019.

Sličnu korist imamo i pri upotrebi nastavaka drugih skala.

11. DIJELJENJE

11.1. Računanje

Traži se kvocijent dvaju brojeva a i b, tj. $a : b = \frac{a}{b} = q$.

Logaritmirajući ovaj izraz dobijemo:

$$\log a - \log b = \log q,$$

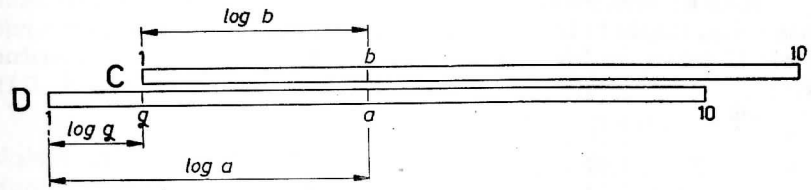
a odatle: $q = \frac{a}{b}$ = numerus (log a − log b), tj.

Kvocijent dvaju brojeva a i b odredi se tako da se oduzmu dužine koje odgovaraju tim brojevima na skali štapa i na skali jezika, i to se uvijek dužina brojnika umanji za dužinu nazivnika.

Prema tome kvocijent dvaju brojeva $\frac{a}{b}$ odredimo na taj način da iznad brojnika (dividenda) a na donjoj skali D štapa postavimo nazivnik (divizor) b uzet na donjoj skali C jezika. Traženi kvocijent q očitat ćemo na skali D štapa ili ispod početne ili ispod konačne crte skale C jezika prema tome koja će se od tih crta nalaziti iznad skale D štapa. Ako je prva znamenka brojnika a, koja je različita od nule, veća od prve znamenke nazivnika b, koja je različita od nule, ležat će iznad skale D početna crta skale C jezika, a u protivnom slučaju konačna.

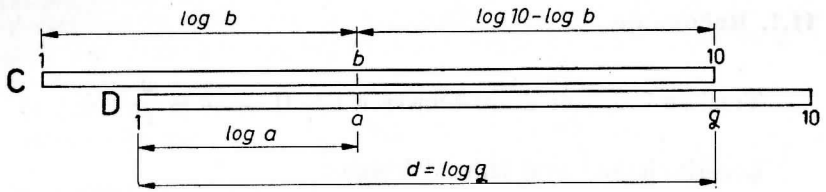
Slijedeće dvije sheme (slike 15 i 16) tumače ovo pravilo.

1. Prva znamenka brojnika a veća je od prve znamenke nazivnika b (nule na početku brojeva ne uzimaju se u obzir.)



Sl. 15.

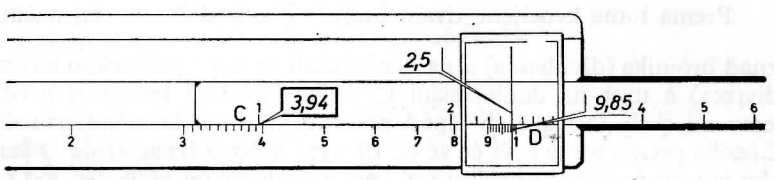
2. Prva znamenka brojnika a manja je od prve znamenke nazivnika b.



Sl. 16.

Na slici vidimo: dužina $d = \log q = \log a + \log 10 - \log b = \log\left(\frac{a}{b} \cdot 10\right)$, a odatle $q = \frac{a}{b} \cdot 10$, tj. ispod konačne crte skale C jezika očitat ćemo traženi kvocijent, ali deset puta uvećan, što nije od važnosti jer nam računalo ne daje uopće položaja decimalnog zareza.

Primjer: 9,85 : 2,5 = 3,94 (slika 17).



Sl. 17.

Stavimo crtu kazaljke iznad dividenda (brojnika) »9—8—5« donje skale S štapa, pod crtu kazaljke namjestimo divizor (nazivnik) »2—5« donje skale C jezika pa kvocijent »3—9—4« očitamo ispod početne crte skale C na donjoj skali D štapa.

Kad bi prva znamenka brojnika bila manja od prve znamenke nazivnika, stajala bi iznad skale D ne početna, već konačna crta donje skale C jezika, te bismo traženi kvocijent očitali ispod ove konačne crte.

Vježbajmo se:

37,8 : 1,97 = 19,2
20,5 : 4,13 = 4,96
0,0381 : 5,13 = 0,00743
83,5 : 0,618 = 135,1
0,0561 : 0,905 = 0,0620
itd.

Prema tome općenito pravilo za računanje kvocijenta dvaju brojeva na donjim skalama C i D računala glasit će:

Iznad brojnika postavljenog pomoću crte kazaljke na donjoj skali D *štapa namjestimo nazivnik uzet na donjoj skali* C *jezika, a kvocijent očitamo na donjoj skali* D *štapa ispod početne ili konačne crte donje skale* C *jezika.*

11.2. Broj mjesta kvocijenta

Za mehaničko određivanje položaja decimalne tačke u kvocijentu nalazi se kadšto u lijevom donjem kutu štapa znak »Q + 1«, tj. »Kvocijent + 1«. Svrha ovog znaka izlazi iz slijedećeg pravila:

Broj mjesta u kvocijentu općenito je jednak algebarskoj razlici brokeva mjesta brojnika i nazivnika, ali ako se kvocijent očitava ispod početne crte donje skale C *jezika, tj. nalijevo od mjesta koincidencije brojnika i nazivnika, mora se ovoj algebarskoj razlici dodati »+ 1« na što sjeća znak »Q + 1« smješten u lijevom donjem kutu štapa. Očitava li se kvocijent ispod konačne crte donje skale* C *jezika, tj. nadesno od mjesta koincidencije, dodatka nema.*

Vidimo: *kao i kod produkta upotreba početne crte donje skale* C *jezika traži dodatak, ali taj je sada »+ 1«, dok pri upotrebi konačne crte dodatka nema.*

Primjeri:

37,5 : 1,921 = 19,52; broj mj.: (+ 2) — (+ 1) + dodat. (+ 1) = + 2
0,0283 : 0,463 = 0,0611; broj mjesta: (— 1) — (0) = — 1
1573 : 0,000212 = 7420000; broj mjesta: (+ 4) — (— 3) = + 7
0,838 : 0,0455 = 18,42; broj mj.: (0) — (— 1) + dodat. (+ 1) = + 2
0,608 : 0,255 = 2,384; br. mjesta: (0) — (0) + dodat. (+ 1) = + 1
π : 0,0808 = 38,9; broj mjesta: (+ 1) — (— 1) = + 2
itd.

Pri vježbanju računanja kvocijenta brojeva uzetih po volji preporučuje se da se dobiveni rezultati kontroliraju logaritamski pomoću skala L i D računala (slike 34 i 35).

11.3. Računanje kvocijenta na skalama A i B

Računanje kvocijenta dvaju brojeva može se vršiti i na gornjim skalama A i B, naravno uz dva puta manju tačnost. Postupak je isti. Rezultat se očita na gornjoj skali A štapa iznad početne ili konačne crte gornje skale B jezika.

12. KOMBINIRANO MNOŽENJE I DIJELJENJE

Logaritamsko računalo osobito je zgodno za računanje onih računskih zadataka u kojima se redaju operacije množenja i dijeljenja. Upotrebom računala pri rješavanju ovih zadataka znatno se štedi rad i vrijeme, mnogo više nego kad bi se upotrebili najsavršeniji računski strojevi.

Ovamo pripadaju:

12.1. Trojno pravilo $\frac{a \cdot b}{c}$

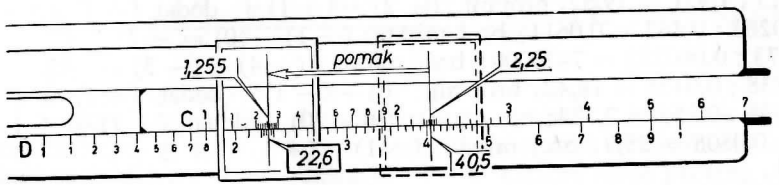
Izračunati po trojnom pravilu $d = \frac{a \cdot b}{c}$ znači izračunati četvrtu proporcionalu, jer se gornji izraz može pisati u obliku: $a : c = d : b$.

U svim slučajevima gdje se javlja proporcija držat ćemo se pri računanju slijedećeg načela:

Uvijek se najprije računa kvocijent $\frac{a}{c}$ *koji se ne očitava, već se odmah množi s drugim faktorom b.*

Primjer 1.

$$\frac{40{,}5 \cdot 1{,}255}{2{,}25} = 22{,}6 \text{ (slika 18).}$$



Sl. 18.

Najprije računamo kvocijent $\frac{4-0-5}{2-2-5}$ Za tu svrhu (sl. 18) iznad broja »4—0—5« donje skale D štapa stavimo »2—2—5« donje skale C jezika. Ispod početne crte skale C leži na skali D izračunan kvocijent (1—8—0—0). Ne očitavamo ga, već ga odmah množimo drugim faktorom »1—2—5—5«. Iznad kvocijenta već stoji početna crta skale C, stoga ne dirajući jezik premjestimo crtu kazaljke na broj »1—2—5—5« skale C. Ispod crte kazaljke leži sada na skali D traženi rezultat »2—2—6«.

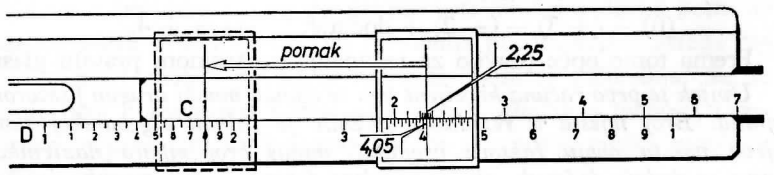
Obratimo pažnju na to da smo po trojnom pravilu izračunali rezultati *jednim pomakom jezika.* U ovom slučaju broj mjesta rezultata jednak je algebarskoj sumi brojeva mjesta obaju faktora brojnika, minus broj mjesta nazivnika. Dodatka nema nikakvog, jer je kvocijent ležao ispod početne crte jezika (dodatak »+ 1«), a množenje se vršilo također pomoću početne crte (dodatak »— 1«), pa je $(+1) + (-1) = 0$.

Za naš primjer imat ćemo: broj mjesta: $(+2) + (+1) - (+1) = +2$, tj. traženi će rezultat biti: 22,6.

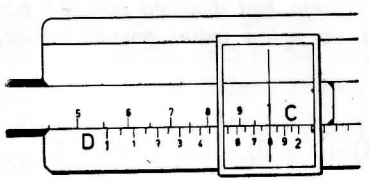
Nažalost kadšto se ne da rezultat izračunati jednim jedinim pomakom jezika.

Zamijenimo u našem primjeru drugi faktor brojnika 1,255 s 9,36. Sad imamo:

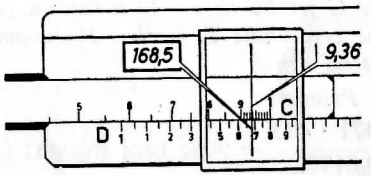
$$\frac{40{,}5 \cdot 39{,}6}{2{,}25} = 168{,}5 \text{ (slika 19)}$$



Sl. 19.



Sl. 20a



Sl. 20b

Kao i uvijek računamo kvocijent $\frac{4-0-5}{2-2-5}$ te kušamo da ga kao i prije odmah izmnožimo s drugim faktorom brojnika »9—3—6«. Vidimo (slika 19) da sad ovaj broj leži izvan donje skale D štapa te ne možemo očitati traženi rezultat. Ne ostaje drugo nego da stavimo crtu kazaljke iznad kvocijenta (»1—8—0—0«) te ne očitavši ga pod crtu kazaljke namjestimo konačnu crtu skale C jezika (sl. 20a). Ispod drugog faktora »9—3—6« skale C ležat će na skali D traženi rezultat »1—6—8—5«). (Sl. 20b).

Imali smo prema tome u ovom računanju ne jedan, već dva pomaka jezika, te pri određivanju broja mjesta rezultata moramo uvesti dodatak i to u našem slučaju »+ 1«, jer smo pri drugom pomaku jezika namjestili *konačnu* crtu jezika koja ne daje dodatka, ali kvocijent je ležao ispod početne crte jezika (dodatak »+ 1«). Za naš primjer imat ćemo dakle: broj mjesta: (+ 2) + (+ 1) − (+ 1) + dodatak (+ 1) = + 3 pa će traženi rezultat glasiti: 168,5.

Namjesti li se kod drugoga pomaka jezika *početna crta* skale C jezika, bit će dodatak »− 1«, jer u tom slučaju kvocijent leži ispod konačne crte pa ne daje dodatka, dok se množenje vrši pomoću početne crte (dodatak »− 1«).

Primjer 2.

$$\frac{0{,}327 \cdot 193{,}2}{0{,}00732} = 8640.$$

Broj mjesta u rezultatu:

(0) + (+ 3) − (− 2) + dodatak (− 1) = + 4.

Prema tome opće pravilo za računanje po trojnom pravilu glasi:

Uvijek se prvo računa kvocijent koji se odmah množi drugim faktorom brojnika. Broj mjesta u rezultatu općenito je jednak algebarskoj sumi brojeva mjesta obaju faktora brojnika, minus broj mjesta nazivnika. Ovome se dodaje dodatak, ako je rezultat dobiven s dva pomaka jezika, i to »+ 1«, *kad je kod drugoga pomaka jezika namještena konačna crta skale C jezika ili* »− 1« *u slučaju postavljanja kod drugoga pomaka početne crte skale* B *jezika. Računamo li uz jedan jedini pomak jezika, dodatka nema.*

Primjeri:

$\frac{0{,}0371 \cdot 413}{0{,}01702} = 900$; broj mjesta: (− 1) + (+ 3) − (− 1) = + 3

$\frac{19{,}15 \cdot 0{,}873}{100{,}5} = 0{,}1663$; broj mjesta: (+ 2) + (0) − (+ 3) + dodatak (+ 1) = 0

$\frac{1{,}208 \cdot 0{,}000217}{\pi} = 0{,}0000835$; br. mj.: (+ 1) + (− 3) − (+ 1) + dodatak (− 1) = − 4

$\frac{4000 \cdot 0{,}000011579}{2{,}718} = 0{,}01705$; br. mj.: (+ 4) + (− 4) − (+ 1) = = − 1 itd.

Pri vježbanju računanja po trojnom pravilu opet se preporučuje da se dobiveni rezultati kontroliraju logaritamski pomoću skala L i D računala (slike 34 i 35).

12.2. Složeni oblici tipa $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot f \cdot g \cdot h}$

12.2.1. Općenito o računanju složenih oblika

Pri računanju svih ovih složenih oblika primjenjivat ćemo načelo koje smo upotrebili kod trojnog pravila: početi s dijeljenjem, a poslije redati naizmjence množenja i dijeljenja. Ako se uz to još mijenja red faktora u brojniku, da se po mogućnosti izbjegnu druga pomicanja jezika, može se ovim načinom računanja postići velika ušteda rada i vremena i znatno povećanje tačnosti rezultata računanja, jer se smanjuje broj postavljanja i čitanja n, a iz poglavlja o tačnosti logaritamskog računala (vidi 7.) znamo već da je srednja greška rezultata razmjerna s $\sqrt{n}$.

Da primjena tog načela za sve složene oblike ne bi dovela do znatnih teškoća pri mehaničkom određivanju položaja decimalnog zareza u rezultatu, koja je baš kod ovih zadataka od velike važnosti, podijelit ćemo sve složene oblike u dva razreda, i to:

1. Oblici koji se daju rastaviti u cio broj postupaka po trojnom pravilu, tj. kod kojih brojnik ima jedan faktor više od nazivnika.
2. Svi ostali složeni oblici.

U prvom i drugom slučaju računat ćemo po trojnom pravilu, ali pri računanju oblika drugog razreda, koji se ne daju rastaviti u cijeli broj postupaka po trojnom pravilu, ostat će nakon primjene našeg postupka jedan ili više faktora u brojniku ili nazivniku, pa ćemo rezultat, koji smo dobili primjenom trojnog pravila, jednostavno množiti ili dijeliti tim preostalim faktorima, uzevši naravno u obzir dodatke »− 1« ili »+ 1« kao kod običnog množenja ili dijeljenja.

Promotrimo oba slučaja.

12.2.2. Složeni oblici u kojima brojnik ima jedan faktor više od nazivnika

Npr. $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e}$ ili $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot f \cdot g}$ itd.

Kako smo već rekli, u ovom slučaju počet ćemo računanje s kvocijentom $\frac{a}{d}$, odnosno $\frac{a}{e}$ u drugom primjeru, koga odmah množimo s jednim od idućih faktora brojnika i to s onim koji ne traži novopomicanje jezika. Dobiveni rezultat dijelimo s drugim faktorom nazivnika (e odnosno f) te ovaj kvocijent množimo s onim od preostalih faktora brojnika, kod kojega se može izbjeći drugo pomicanje jezika itd.

Primjer 1. $$\frac{\overset{1)}{0{,}437} \cdot \overset{7)}{80{,}6} \cdot \overset{3)}{0{,}00255} \cdot \overset{5)}{6{,}08}}{\underset{2)}{1{,}728} \cdot \underset{4)}{460} \cdot \underset{6)}{0{,}09125}} = 0{,}00753$$

Prvo računamo kvocijent $\frac{4-3-7}{1-7-2-8}$. Za tu svrhu iznad broja »4—3—7« donje skale D štapa stavimo nazivnik »1—7—2—8« uzet na donjoj skali C jezika. Ispod početne crte skale C leži kvocijent (2—5—3). Ne očitavamo ga, već odmah množimo dalje. Pokušavamo ga množiti drugim faktorom brojnika »8—0—6«. Ovaj broj, kako vidimo, leži na skali C izvan skale D. Da izbjegnemo drugo pomicanje jezika ostavimo ga za sada, pa množimo naš kvocijent trećim faktorom brojnika »2—5—5«, jer taj treći faktor ne traži drugog pomicanja jezika. Prenosimo dakle crtu kazaljke na »2—5—5). I njega ne očitavamo, već dijelimo drugim faktorom nazivnika »4—6—0«. Za tu svrhu, ne dirajući kazaljke, namjestimo pod njenu crtu »4—6—0« skale C. Ispod početne crte skale C leži sada naš drugi kvocijent (1—4—0—2) koji opet ne očitavamo. Budući da bi množenje ovog kvocijenta s ispuštenim faktorom brojnika tražilo novo pomicanje jezika, množimo ovaj kvocijent četvrtim faktorom brojnika »6—0—8«. Ne dirajući jezik označimo crtom kazaljke ovaj broj na skali C. Ispod crte kazaljke leži sada na skali D naš produkt (8—5—2). Da ga podijelimo trećim faktorom nazivnika »9—1—2—5« namjestimo pod crtu kazaljke pomicanjem jezika ovaj broj uzet na skali C. Traženi kvocijent (9—3—4) leži sada na skali D ispod konačne crte skale C. Ne očitavajući ga prenosimo crtu kazaljke na izostavljeni drugi faktor brojnika »8—0—6« skale C. Ispod crta kazaljke leži na skali D naš konačni rezultat »7—5—3« koji pribilježimo, pamteći da nismo imali drugih pomaka jezika.

Položaj decimalnog zareza u rezultatu odredit ćemo na temelju ovog pravila:

Broj mjesta rezultata jednak je općenito algebarskoj sumi brojeva mjesta faktora u brojniku, umanjenoj za algebarsku sumu brojeva mjesta faktora u nazivniku. Ako pri postavljanju nije bilo drugih pomicanja jezika dodatka nema; inače se ovoj razlici dodaje kod ovih drugih pomaka jezika:

»+ 1« za svako postavljanje konačne crte donje skale C *jezika*
i
»— 1« za svako postavljanje početne crte ove skale.

Uspjelo nam je da u našem primjeru potpuno izbjegnemo druga pomicanja jezika, dakle: dodatka nema, a broj mjesta rezultata bit će jednak:

$$[(0) + (+2) + (-2) + (+1)] - [(+1) + (+3) + (-1)] = \\ = 2 - 2 + 1 - 1 - 3 + 1 = -2$$

Prema tome će rezultat glasiti: 0,00753.

Primjer 2. $$\frac{\overset{1)}{5{,}05} \cdot \overset{3)}{0{,}143} \cdot \overset{7)}{12{,}36} \cdot \overset{5)}{0{,}0493} \cdot \overset{9)}{9{,}63}}{\underset{2)}{0{,}0213} \cdot \underset{4)}{7{,}42} \cdot \underset{6)}{0{,}1902} \cdot \underset{8)}{0{,}001365}} = 103100$$

Red računanja prikazan je rednim brojkama. Pri množenju s posljednjim faktorom brojnika »9—6—3« bili smo prisiljeni da, označivši crtom kazaljke posljedni kvocijent (1—0—7—1), namjestimo pod crtu kazaljke *konačnu* crtu donje skale C jezika, pa da tek onda množimo s »9—6—3«, tj. izvršili smo drugi pomak jezika.

Prema tome moramo pri određivanju položaja decimalne tačke u rezultatu uvesti dodatak (+ 1) te će broj mjesta biti: (+ 1) + (0) + + (+ 2) + (— 1) + (+ 1) — (— 1) — (+ 1) — (0) — (— 2) + dodatak (+ 1) = + 1 + 2 — 1 + 1 + 1 — 1 + 2 + 1 = + 6.

Primjer 3. $$\frac{\overset{1)}{61{,}3} \cdot \overset{7)}{0{,}836} \cdot \overset{5)}{0{,}0475} \cdot \overset{3)}{2{,}05} \cdot \overset{9)}{0{,}1103}}{\underset{2)}{15{,}72} \cdot \underset{4)}{5{,}38} \cdot \underset{6)}{0{,}931} \cdot \underset{8)}{9{,}05}} = 0{,}000773$$

U posljednjem množenju opet smo imali drugi pomak jezika kod kojega smo namjestili *početnu* crtu jezika. Dodatak je dakle »— 1«.

Broj mjesta rezultat: (+ 2) + (0) + (— 1) + (+ 1) + (0) — — (+ 2) — (+ 1) — (0) — (+ 1) + dodatak (— 1) = + 2 — 1 + 1 — — 2 — 1 — 1 — 1 = — 3.

12.2.3. Svi ostali složeni oblici u kojima broj faktora u brojniku nije za jedan veći od broja faktora u nazivniku

Npr. $\frac{a \cdot b \cdot c}{d \cdot e \cdot f}$ ili $\frac{a \cdot b}{c \cdot d \cdot e}$ ili $\frac{a \cdot b \cdot c \cdot d}{e \cdot f}$ itd.

Kako smo već rekli i u ovom slučaju računamo po trojnom pravilu, privremeno izostavivši u brojniku ili nazivniku jedan ili više faktora da preostali dio složenog oblika ima u brojniku jedan faktor više od nazivnika. Izostavit ćemo dakle f u prvom primjeru, d i e u drugom i jedan od faktora brojnika u trećem primjeru. Rezultat dobiven na taj način, koji naravno ne očitavamo, jednostavno množimo ili dijelimo na skalama C i D računala privremeno izostavljenim faktorima složenog oblika, bilježeći (prema poznatom nam pravilu) dodatak »— 1« kod svakog množenja pomoću početne crte jezika, odnosno »+ 1« ako rezultat dijeljenja padne ispod te početne crte.

Broj mjesta rezultata opet je jednak algebarskoj sumi brojeva mjesta faktora u brojniku umanjenoj za algebarsku sumu brojeva mjesta faktora u nazivniku. Tako dobivenoj sumi treba dodati:

1) pri računanju po trojnom pravilu, ukoliko ima drugih pomaka jezika:

dodatak »+ 1« za svako postavljanje *konačne* crte donje skale C jezika i

dodatak »— 1« za svako postavljanje *početne* crte te skale.

2) pri računanju s privremeno izostavljenim faktorima:

dodatak »— 1« za svako množenje pomoću *početne* crte donje skale C jezika i

dodatak »+ 1« za svako dijeljenje, ako se kvocijent nađe ispod *početne* crte te skale.

Primjer 1. $\dfrac{\overset{1)}{41{,}75} \cdot \overset{3)}{0{,}605} \cdot \overset{5)}{1{,}938} \cdot \overset{7)}{0{,}001362}}{\underset{2)}{26{,}3} \cdot \underset{4)}{0{,}435} \cdot \underset{6)}{0{,}0301} \cdot \underset{8)}{1{,}559}} = 0{,}1242.$

Da dobijemo oblik koji u brojniku ima jedan faktor više od nazivnika i koji možemo računati po trojnom pravilu, privremeno izostavimo posljednji faktor nazivnika, tj. 1,559. Sada računajmo po trojnom pravilu, kako je to prikazano za prvu vrstu složenih oblika. Red računanja naznačen je rednim brojkama. Opažamo da nismo imali pri računanju po trojnom pravilu drugog pomaka jezika, dakle nema ni dodatka. Rezultat računanja po trojnom pravilu dijelimo s preostalim faktorom nazivnika 1,559, tj. pod crtu kazaljke ispod koje leži rezultat računanja po trojnom pravilu namjestimo taj preostali faktor uzet na donjoj skali C jezika. Ispod početne crte jezika leži sada na donjoj skali D štapa traženi rezultat 1—2—4—2.

Znamo da početna crta jezika daje pri dijeljenju dodatak »+ 1«, dakle kod određivanja položaja decimalnog zareza u rezultatu treba uvesti dodatak »+ 1« te će broj mjesta biti:

(+ 2) + (0) + (+ 1) + (— 2) — (+ 2) — (0) — (—1) — (+ 1) + dodatak (+ 1) = 2 + 1 — 2 — 2 + 1 — 1 + 1 = 0.

Primjer 2. $\dfrac{\overset{1)}{0{,}006225} \cdot \overset{5)}{0{,}0738} \cdot \overset{6)}{\overset{0}{0{,}0842}} \cdot \overset{3)}{17{,}63} \cdot \overset{7)}{\overset{-1}{0{,}125}}}{\underset{2)}{\pi} \cdot \underset{4)}{0{,}00518}} = 0{,}00525.$

Kako u brojniku imamo pet faktora, a u nazivniku samo dva, moramo privremeno izostaviti dva faktora brojnika da možemo prvi dio računa izvesti po trojnom pravilu. Koje ćemo faktore izostaviti ne možemo unaprijed odrediti, jer pri računanju po trojnom pravilu mijenjamo redoslijed faktora u brojniku da po mogućnosti izbjegnemo druge pomake jezika. Postupajući na taj način uspjelo nam je u našem primjeru izbjeći druge pomake jezika [računanje od 1) do uključivo 5)] pa dodatka nema. Rezultat množimo običnim načinom s privremeno izostavljenim faktorima brojnika 6) i 7). Prvo smo množenje izvršili pomoću konačne crte jezika, dakle dodatka nema, dok drugo množenje daje dodatak »— 1«, jer smo morali namjestiti početnu crtu jezika iznad rezultata množenja s faktorom 6).

Broj mjesta rezultata:

(— 2(+ (— 1) + (— 1) + (+ 2) + (0) — (+ 1) — (— 2) + dodatak (— 1) = — 2 — 1 — 1 + 2 — 1 + 2 — 1 = — 2.

Primjer 3. $\dfrac{\overset{1)}{0{,}3167} \cdot \overset{3)}{2950} \cdot \overset{7)}{100{,}5} \cdot \overset{5)}{0{,}04835}}{\underset{2)}{73{,}3} \cdot \underset{4)}{2{,}19} \cdot \underset{6)}{0{,}05552} \cdot \underset{8)}{\underline{62{,}91}} \cdot \underset{9)}{\underline{0{,}01411}}} = 574.$

Tu moramo privremeno izostaviti dva posljednja faktora nazivnika. Pri računanju po trojnom pravilu [od 1) do uklj. 7)] imali smo drugi pomak jezika pri množenju s faktorom 7), pri čemu smo namjestili početnu crtu jezika. To daje dodatak »— 1«. Pri dijeljenju običnim načinom rezultata računanja po trojnom pravilu s faktorima naziv-

nika 8) i 9) ležao je u prvom slučaju rezultat ispod konačne crte jezika (dodatka nema), a u drugom slučaju — ispod početne crte (dodatak »+ 1«).

Broj mjesta:

$0 + (+4) + (+3) + (-1) - (+2) - (+1) - (-1) - (+2) - (-1)$ + dodatak (-1) + dodatak $(+1) = 4 + 3 - 1 - 2 - 1 - 2 + 1 - 1 + 1 = +3$.

12.2.4. Primjedbe

1. Pri izračunavanju složenih oblika opazili smo da se množenje vrši pomakom *kazaljke*, a dijeljenje pomakom, *jezika* i da ti pomaci slijede *naizmjence* jedan iza drugoga. Prema tome treba paziti da *iza pomaka kazaljke uvijek dođe pomak jezika*, a *iza pomaka jezika — pomak kazaljke!*

2. Da određivanje položaja decimalnog zareza u rezultatu napreduje što brže uzimat ćemo neposredno za sve faktore *nazivnika* broj mjesta *s protivnim predznakom*, a za faktore brojnika s pravim predznakom, jer se brojevi mjesta za faktore u nazivniku oduzimaju, a za faktore u brojniku zbrajaju. Tako npr. broj 0,000728 ima broj mjesta »— 3«, te ako se nalazi u brojniku uzet ćemo »— 3«, jer je $+(-3) = -3$, a ako se nalazi u nazivniku »+ 3«, jer je $-(-3) = +3$. Za primjer navedimo određivanje na taj način položaja decimalnog zareza u posljednjem primjeru računanja složenog oblika:

$4 + 3 - 1 - 2 - 1 - 2 + 1 - 1$ (dodatak) $+ 1$ (dodatak) $= +2$.

3. Iz poglavlja »Tačnost logaritamskog računala (v. 7.) znamo da je srednja greška rezultata računanja s računalom razmjerna sa $\sqrt{n}$, gdje je n broj postavljanja i čitanja. Kako broj postavljanja pri računanju složenih oblika može biti prilično velik, posljednja tj. treća znamenka razultata može biti nesigurna za nekoliko jedinica.

Npr. u posljednjem primjeru računanja složenog oblika imali smo deset postavljanja i jedno čitanje. Dakle $n = 11$, pa srednja greška rezultata iznosi:

$0{,}00092 \cdot \sqrt{11} = 0{,}00092 \cdot 3{,}32 = 0{,}00305 =$ približno $0{,}003 = 0{,}3\% = 3\,‰$, tj. rezultat poprečno nije siguran za nekih 3 ‰ svoje vrijednosti, a to čini $57{,}4 \cdot 0{,}003 = 0{,}1722 =$ približno $0{,}2 =$ dvije jedinice treće znamenke.

Odatle slijedi dalje da se tačnost rezultata povećava s umanjenjem broja postavljanja, a to se baš postizava računanjem složenih oblika po trojnom pravilu uz promjenu redoslijeda faktora u brojniku.

3. KVADRAT I DRUGI KORIJEN

13.1. Načela računanja

Traži se:

$$a^2 = x \quad \text{i} \quad \sqrt{b} = y$$

Logaritmirajući ove izraze imamo:

$$2 \log a = \log x \quad \text{i} \quad \frac{1}{2} \log b = \log y$$

a odatle:

$$x = a^2 = \text{numerus } (2 \log a) \quad \text{i} \quad y = \sqrt{b} = \text{numerus } \left(\frac{1}{2} \log b\right).$$

Ovi izrazi kazuju da *logaritamskoj duljini kvadrata odgovara dvostruka logaritamska duljina broja koji se kvadrira i obrnuto: logaritamskoj duljini drugoga korijena odgovara polovina logaritamske duljine broja iz kojega se vadi drugi korijen, tj. polovina logaritamske duljine radikanda.*

Prema tome ako uzmemo na bilo kakvoj logaritamskoj skali, npr. na donjoj skali D štapa, neku duljinu u šestar, npr. razmak »1« do »2« pa taj razmak udvostručimo, past će šiljak šestara u »4« jer je $2^2 = 4$. Obrnuto: ako npr. uzmemo u šestar razmak »1« do »9« pa ga smanjimo na polovinu, past će šiljak šestara u »3« jer je $\sqrt{9} = 3$.

Da se olakša i ubrza očitavanje na računalu kvadrata i drugoga korijena nanesene su, kako već znamo, gornje osnovne skale računala, tj. skale A i B (slike 2, 5 i 6) u dva puta manjem mjerilu nego donje skale C i D. Zato će logaritamskoj duljini nekog broja uzetog na donjoj skali D štapa, odgovarati na gornjoj skali A štapa dvije logaritamske duljine istoga broja i obrnuto: logaritamskoj duljini nekog broja skale A odgovarat će na skali D polovina logaritamske duljine tog broja.

Prema tome *iznad svakog broja donje skale* D *štapa leži na gornjoj skali* A *štapa kvadrat toga broja i obrnuto: ispod svakoga broja gornje skale* A *štapa leži na donjoj skali* D *štapa drugi korijen toga broja. Isto vrijedi za donju i gornju skalu* C *i* B *jezika.*

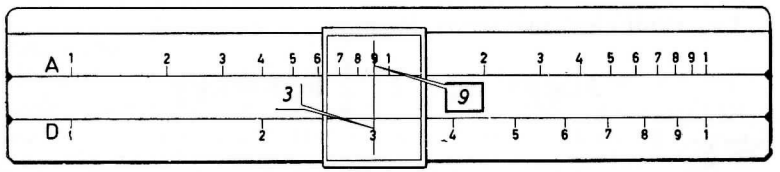
Prelazimo na posebno promatranje određivanja kvadrata i drugog korijena.

13.2. Kvadriranje

13.2.1. Računanje

Uzmimo nekoliko primjera:

1. $3^2 = 9$ (s.. 21).

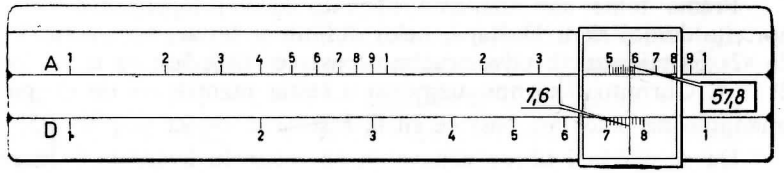


Sl. 21.

Stavimo crtu kazaljke iznad »3« donje skale D štapa pa kvadrat »9« očitamo ispod crte kazaljke na gornjoj skali A štapa.

2. $7{,}6^2 = 57{,}8$ (sl. 22).

Postupamo kao gore.



Sl. 22.

Vježbajmo se:

$2{,}5^2 = 6{,}25$ $\quad$ $0{,}15^2 = 0{,}0225$

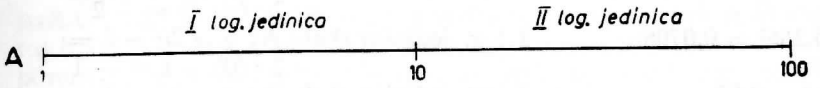
$31^2 = 691$ $\quad$ $12{,}46^2 = 155{,}3$ itd.

Prema tome pravilo za određivanje kvadrata nekog broja glasit će:

Broj koji se kvadrira postavi se crtom kazaljke na donjoj skali D *štapa, a traženi se kvadrat očita ispod crte kazaljke na gornjoj skali* A *štapa.*

Da mehanički odredimo položaj decimalnog zareza u kvadratu nekog broja moramo obratiti pažnju na kojem smo dijelu gornje skale A štapa očitali ovaj kvadrat.

Znamo već da skala A sadrž dvije logaritamske jedinice (slika 23).



Sl. 23.

Zvat ćemo lijevu logaritamsku jedinicu »*prvom logaritamskom jedinicom*« a desnu »*drugom logaritamskom jedinicom*«.

13.2.2. Broj mjesta kvadrata

Kvadrat broja ima obzirom na broj koji se kvadrira dvostruki broj mjesta, ako je očitan na II-oj logaritamskoj jedinici gornje skale A *štapa, ili dvostruki broj mjesta* -1, *ako je očitan na I-oj logaritamskoj jedinici te skale.*

Ako dakle sa n označimo broj mjesta broja a koji se kvadrira a sa q broj mjesta kvadrata tog broja, tj. broj mjesta u a^2, imat će kvadrat $2n$ mjesta ako je očitan na II-oj logaritamskoj jedinici skale A, ili $(2n - 1)$ mjesta ako je očitan na I-oj logaritamskoj jedinici skale A.

Stoga vidimo da je I-va *logaritamska jedinica skala za kvadrate s neparnim brojem mjesta, dok je* II-*ga logaritamska jedinica skala za kvadrate s parnim brojem mjesta.*

Primjeri:

1. Traži se $0{,}0597^2$.

Crtu kazaljke namjestimo iznad broja »5—9—7« donje skale D štapa, te rezultat »3—5—6« očitamo na gornjoj skali A štapa i to na njenoj II-oj logaritamskoj jedinici. Prema tome broj mjesta q kvadrata bit će jednak $2n$, gdje je n broj mjesta broja koji se kvadrira. U našem je slučaju $n = -1$, dakle $q = 2n = 2 \cdot (-1) = -2$, te je $0{,}0597^2 = 0{,}00356$.

2. Traži se $13{,}28^2$.

Postupajući kao gore očitat ćemo rezultat »1—7—6—4« na I-oj logaritamskoj jedinici skale A. Prema tome broj mjesta q kvadrata jednak je $(2n - 1)$. U našem je slučaju $n = +2$, dakle: $q = 2n - -1 = 2 \cdot (+2) - 1 = 4 - 1 = +3$, te je $13{,}28^2 = 176{,}4$.

Vježbajmo se:

$4{,}05^2 = 16{,}4$ II log. jedinica skale A; $q = 2n = 2 \cdot (+1) = +2$

$0{,}266^2 = 0{,}0708$ I log. jedinica skale A; $q = 2n - 1 = 2 \cdot (0) - 1 = -1$

$\pi^2 = 9{,}87$ I log. jedinica skale A; $q = 2n - 1 = 2 \cdot (+1) - 1 = +1$

$0{,}00803^2 = 0{,}0000645$ II log. jedinica skale A; $q = 2n = 2 \cdot (-2) = -4$

$10{,}93^2 = 119{,}5$ I log. jedinica skale A; $q = 2n - 1 = 2 \cdot (+2) - 1 = +3$

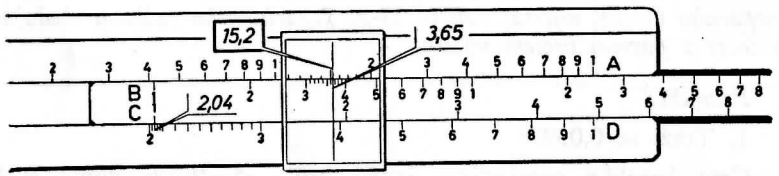
$0{,}319^2 = 0{,}1018$ II log. jedinica skale A; $q = 2n = 2 \cdot (0) = 0$ itd.

13.2.3. Kombinirano kvadriranje množenje i dijeljenje

13.2.3.1. Oblici tipa $a^2 \cdot b$

Zadovoljava li nas tačnost što je daju gornje skale A i B računala, računat ćemo oblike tipa $a^2 \cdot b$ najbolje tako da dobijemo prvo na skali A kvadrata a^2, pa onda nastavimo računanje na gornjim skalama A i B računala.

Primjer 1) $2{,}04^2 \cdot 3{,}65 = 15{,}2$ (sl. 24).



Sl. 24.

Stavimo početnu crtu donje skale C jezika iznad broja »2—0—4« donje skale D štapa. Iznad početne crte gornje skale B jezika leži kvadrat (4—1—6) tog broja. Ne očitamo ga, već odmah prelazimo na množenje. U tu svrhu postavimo crtom kazaljke drugi faktor »3—6—5« na skali B jezika. Ispod crte kazaljke leži sada na gornjoj skali A štapa traženi rezultat »1—5—2«.

Kadšto ćemo morati, da bismo odredili a^2 namjestiti iznad a skale D ne početnu, već konačnu crtu donje skale C jezika da uzmognemo izvesti množenje s drugim faktorom b.

Primjer 2. $7{,}31^2 \cdot 0{,}182 = 9{,}72$

Iznad broja »7—3—1« skale D stavimo konačnu crtu skale C jezika. Iznad konačne crte skale B jezika leži sada na skali A kvadrat tog broja. Ne očitamo ga, već ga množimo s drugim faktorom »1—8—2« postavivši crtom kazaljke ovaj broj na skali B. Ispod crte kazaljke leži sada na skali A traženi rezultat »9—7—2«.

Primjeri: $0{,}203^2 \cdot 6{,}56 = 0{,}270$

$5{,}37^2 \cdot 0{,}465 = 13{,}4$

Odredi površinu kruga P polumjera $r = 15$ cm

$$P = r^2 \cdot \pi = 15^2 \cdot \pi = 707 \text{ cm}^2 \text{ itd.}$$

Tačnije ćemo rezultate imati ako čitavo računanje izvedemo na donjim skalama C i D. U tu svrhu rastavit ćemo kvadrat u dva faktora, te umjesto $a^2 \cdot b$ računamo na skalama C i D trostruki produkt $a \cdot a \cdot b$.

13.2.3.2. Oblici tipa $\frac{a^2}{b}$

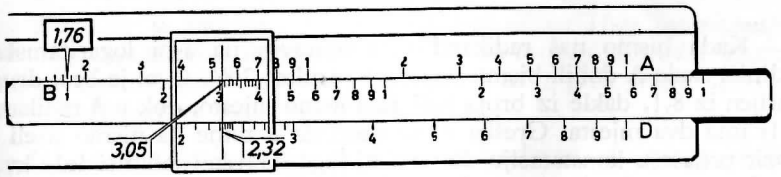
I oblici tipa $\frac{a^2}{b}$ mogu se računati na dva načina.

Tražimo li svu tačnost koju daje računalo moramo računanje provesti na donjim skalama C i D. U tu svrhu predočit ćemo $\frac{a^2}{b}$ u obliku $\frac{a \cdot a}{b}$ te ćemo ga računati po trojnom pravilu.

Primjer: $\frac{2{,}83^2}{0{,}418} = \frac{2{,}83 \cdot 2{,}83}{0{,}418} = 19{,}16$

Zadovoljava li nas tačnost što je daju gornje skale A i B, prenijet ćemo računanje na ove skale.

Primjer: $\frac{2{,}32^2}{3{,}05} = 1{,}76$ (slika 25).



Sl. 25.

Stavimo crtu kazaljke iznad broja »2—3—2« donje skale D štapa. Ispod crte kazaljke leži sada na skali A kvadrat toga broja. Ne očitavajući ga pomičemo jezik tako da pod crtu kazaljke padne nazivnik »3—0—5« uzet na skali B. Iznad početne crte skale B ležat će sada na skali A traženi rezultat »1—7—6«.

Primjeri:

$$\frac{41{,}6^2}{0{,}105} = 164{,}9 \qquad \frac{0{,}896^2}{2{,}35} = 0{,}342 \qquad \frac{12{,}33^2}{5{,}43} = 28{,}0$$

13·3. Određivanje drugog korijena

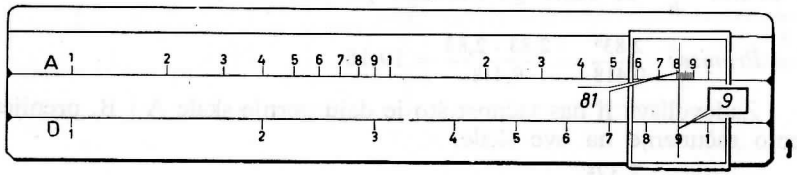
13.3.1. Računanje

Rekli smo već da ispod svakoga broja gornje skale A štapa leži na donjoj skali D štapa drugi korijen toga broja.

Prema tome znamo riješiti ovaj primjer:

$$\sqrt{81} = 9 \text{ (slika 26).}$$

Crtom kazaljke označimo na II-oj logaritamskoj jedinici gornje skale A štapa radikand »81« pa rezultat »9« očitamo na donjoj skali D štapa.



Sl. 26.

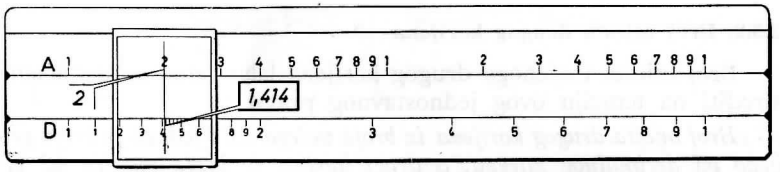
Kada bismo naš radikand »81« postavili na I-oj logaritamskoj jedinici skale A dobili bismo pogrešan rezultat 2,84. Ovaj je broj drugi korijen iz 8,1, dakle iz broja koji ima jedno mjesto, dok naš radikand »81« ima dva mjesta. Greška bi se sastojala u tome da nismo uzeli u obzir prijašnju konstataciju da na I-oj logaritamskoj jedinici leže kvadrati s neparnim brojem mjesta, dok je II-ga logaritamska jedinica

skala za kvadrate s parnim brojem mjesta. Prema tome vidimo da *pri vađenju drugog korijena nije svejedno stavimo li radikand na I-oj ili na II-oj logaritamskoj jedinici gornje skale* A *štapa.*

Uzmimo još jedan primjer:

$$\sqrt{2} = 1{,}414 \text{ (slika 27).}$$

Radikand 2 ima jedno mjesto, tj. ima neparan broj mjesta, dakle ga uzimamo na I-oj logaritamskoj jedinici skale A.



Sl. 27.

Da brzo i sigurno odredimo mjesto postavljanja svakog broja čiji se drugi korijen traži i da istodobno mehanički odredimo broj mjesta u traženom rezultatu, postupamo ovako:

Radikande veće od 1, tj. cijele brojeve i neprave decimalne razlomke, dijelimo od decimalnog zareza na lijevo, a radikande manje od 1, tj. prave decimalne razlomke, dijelimo od decimalnog zareza na desno u grupe od dvije brojke.

Npr.:

$\sqrt{/\mathbf{7}/35/}$; $\sqrt{/\mathbf{20}/63,/85}$; $\sqrt{0,/\mathbf{31}/5}$; $\sqrt{0,/\mathbf{03}/15}$; $\sqrt{0,/00/\mathbf{18}/6}$ itd.

Kako vidimo pri ovoj diobi mogu nastati slijedeće grupe:

1. Grupa od dvije nule: /**00**/ — nulte grupe.
2. Grupe od dva mjesta: /**20**/; /**31**/; /**18**/ — parne grupe.
3. Grupe od jednog mjesta: /**7**/; /**03**/ — neparne grupe.

Da li će se radikand postaviti na I-*oj ili na* II-*oj logaritamskoj jedinici gornje skale* A *štapa mjerodavna je za brojeve veće od* 1 *njihova krajnja lijeva grupa, a za radikande manje od* 1 *prva grupa desno od decimalnog zareza, koja nije nulta grupa.*

(U gore navedenim primjerima mjerodavne su grupe deblje tiskane.)

Sad smo u stanju da formuliramo opće pravilo za određivanje drugoga korijena iz broja po volji:

Ako mjerodavna grupa radikanda ima jedno mjesto, tj. ako je ta grupa neparna, postavi se radikand crtom kazaljke na I-*oj logaritamskoj jedinici gornje skale* A *štapa, a ako mjerodavna grupa radikanda ima dva mjesta, tj. ako je parna, radikand se postavi na* II-*oj logaritamskoj jedinici te skale* A, *pa se tražena vrijednost drugoga korijena očita ispod crte kazaljke na donjoj skali* D *štapa.*

13.3.2. Broj mjesta drugog korijena

Broj mjesta traženoga drugog korijena lako ćemo sada mehanički odrediti na temelju ovog jednostavnog pravila:

Broj mjesta drugog korijena iz broja većega od 1 *jednak je broju grupa lijevo od decimalnog zareza, a drugi korijen iz broja manjeg od* 1, *tj. iz pravog decimalnog razlomka opet je decimalni razlomak, koji ima iza decimalne tačke toliko nula koliko ima radikand nultih grupa desno od te tačke.*

Primjeri:

Zadatak	Broj mjesta mjerodavne grupe (deblje tiskana)	Mjesto postavljanja radikanda na gornjoj skali A štapa	Broj mjesta korijena
$\sqrt{\mathbf{2},75} = 1{,}659$	1 (neparna)	I log. jedin.	1
$\sqrt{\pi} = \sqrt{\mathbf{3},142} = 1{,}772$	1 (neparna)	I log. jedin.	1
$\sqrt{\mathbf{60},5} = 7{,}78$	2 (parna)	II log. jedin.	1
$\sqrt{\mathbf{3}17} = 17{,}80$	1 (neparna)	I log. jedin.	2
$\sqrt{\mathbf{5}61{,}00} = 237$	1 (neparna)	I log. jedin.	3
$\sqrt{\mathbf{7}38{,}891} = 27{,}2$	1 (neparna)	I log. jedin.	2
$\sqrt{0{,}\mathbf{40}5} = 0{,}637$	2 (parna)	II log. jedin.	0
$\sqrt{0{,}\mathbf{04}05} = 0{,}2013$	1 (neparna)	I log. jedin.	0
$\sqrt{0{,}00\mathbf{12}89} = 0{,}0359$	2 (parna)	II log. jedin.	—1
$\sqrt{0{,}5} = \sqrt{0{,}\mathbf{50}} = 0{,}707$	2 (parna)	II log. jedin.	0
$\sqrt{0{,}00\,00\,\mathbf{09}\,0878} = 0{,}003015$	1 (neparna)	I log. jedin.	—2

14. KUB I TREĆI KORIJEN

14.1. Načela računanja

Traži se: $a^3 = x$ i $\sqrt[3]{b} = y$

Logaritmirajući ove izraze imamo:

$$3 \log a = \log x \quad \text{i} \quad \frac{1}{3} \log b = \log y.$$

Odatle:

$$x = a^3 = \text{numerus } (3 \log a) \quad \text{i} \quad y = \sqrt[3]{b} = \text{numerus } \left(\frac{1}{3} \log b\right).$$

Ti izrazi kazuju da *logaritamskoj duljini kuba odgovara trostruka logaritamska duljina broja koji se kubira i obrnuto: logaritamskoj duljini trećeg korijena odgovara trećina logaritamske duljine radikanda.*

Imamo dakle isti problem koji smo imali pri određivanju kvadrata i drugog korijena. Kubna skala K mora dakle, biti, nanesena u tri puta manjem mjerilu nego donje skale C i D računala te će sadržavati tri logaritamske jedinice (slike 5, 6, 28 i 29). U ovom će slučaju svakoj logaritamskoj duljini broja uzetog na skali D odgovarati na kubnoj skali K tri logaritamske duljine istog broja i obrnuto: svakoj logaritamskoj duljini nekog broja skale K odgovarat će na skali D trećina logaritamske duljine istog broja.

Kako smo već prije rekli kubna se skala K nalazi na računalima sustava »Rietz« i sustava »Darmstadt« na njihovoj prednjoj strani. Ona je najgornja skala štapa (slike 5 i 6). Na nekim računalima drugih sustava kubna skala K smještena je na prednjem rubu štapa, te se očitanja i postavljanja na ovoj skali vrše pomoću posebne indeksne crte nanesene na okviru kazaljke ili se nalazi na jeziku (vidi slike 29).

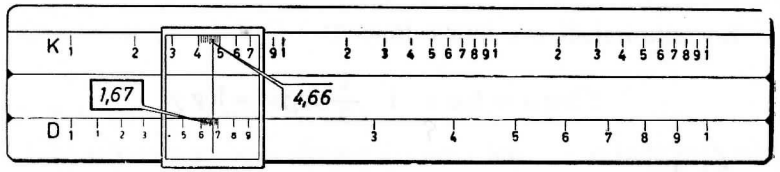
Kako vidimo ova skala K sadrži tri logaritamske jedinice kojima odgovara jedna logaritamska jedinica donje skale D štapa. Prema tome *svakom broju uzetom na donjoj skali* D *štapa odgovara na skali* K *kub ovoga broja i obrnuto: svakom broju kubne skale* K *odgovara na skali* D *treći korijen iz tog broja.*

14.2. Kubiranje

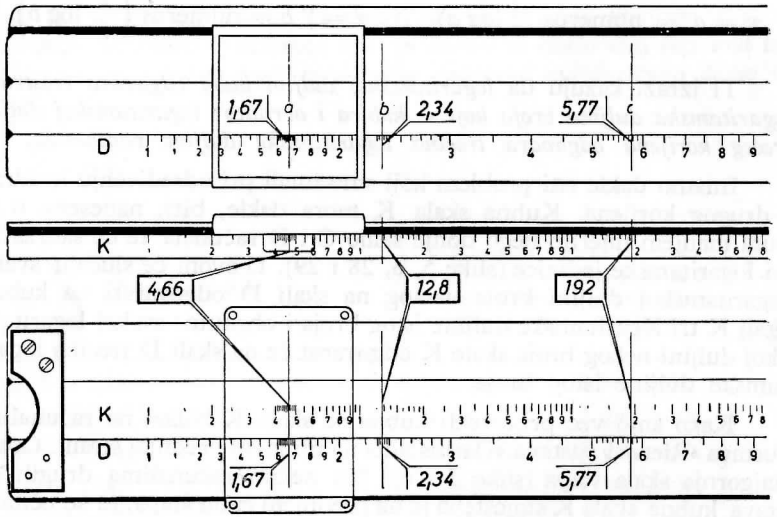
14.2.1. Računanje

Primjer: $1{,}67^3 = 4{,}66$ (slika 28).

Stavimo crtu kazaljke iznad »1—6—7« donje skale D štapa pa traženi kub »4—6—6« očitamo ispod crte kazaljke na kubnoj skali K.



Sl. 28.



Sl. 29.

Isti primjer prikazan je na slici 29 (primjer a) na računalu na kojem je kubna skala K smještena na prednjem rubu štapa. U ovom se slučaju rezultat očita ispod posebne indeksne crte nanesene na okviru kazaljke, kako se to vidi na slici. Isti primjer prikazan je u donjem dijelu slike na računalu kojemu je kubna skala K nanesena na jeziku.

Na istoj su slici prikazani još ovi kubi:

$2{,}34^3 = 12{,}8$ (b)
$5{,}77^3 = 192$ (c)

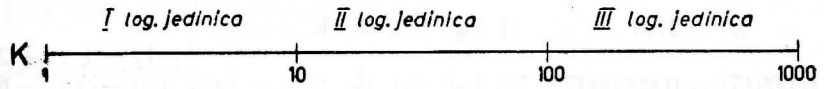
Navedeni primjeri prikazani su u sl. 29 i na računalima drugih sistema.

Prema tome opće pravilo za određivanje vrijednosti kuba nekog broja glasi:

Broj koji se kubira postavi se crtom kazaljke na donjoj skali D *štapa, pa se traženi kub očita ispod crte kazaljke (ili ispod rubnog indeksa kazaljke) na kubnoj skali* K *štapa.*

Pri mehaničkom određivanju položaja decimalne tačke u kubu moramo kao i kod kvadrata obratiti pažnju na to na kojoj smo logaritamskoj jedinici kubne skale K očitali rezultat.

Zvat ćemo: lijevu logaritamsku jedinicu skale K »I-*va logaritamska jedinica*«, srednju »II-*ga logaritamska jedinica*«, a desnu »III-*ća logaritamska jedinica*« (slika 30).



Sl. 30.

14.2.2. Broj mjesta kuba

Kub bilo kakvog broja ima s obzirom na broj koji se kubira trostruki broj mjesta, ako je očitan na III-*oj logaritamskoj jedinici kubne skale* K, *trostruki broj mjesta — 1 ako je očitan na* II-*oj logaritamskoj jedinici, ili trostruki broj mjesta — 2 ako je očitan na* I-*oj logaritamskoj jedinici te skale.*

Prema tome označimo li sa n broj mjesta nekoga broja a, a sa c broj mjesta u a^3 bit će:

$c = 3n - 2$, ako je a^3 očitan na I-oj logaritamskoj jedinici
$c = 3n - 1$, ako je a^3 očitan na II-oj logaritamskoj jedinici
$c = 3n$ ako je a^3 očitan na III-oj logaritamskoj jedinici

Na slikama 28 i 29 prikazani su kubi:

$1{,}67^3 = 4{,}66$ (a); $2{,}34^3 = 12{,}8$ (b); $5{,}77^3 = 192$ (c)

Kako vidimo prvi kub »4—6—6« pada na I-vu logaritamsku jedinicu kubne skale K, dakle će njegov broj mjesta c biti $c = 3n - 2 = 3 \cdot 1 - 2 = 1$.

Drugi kub »1—2—8« očitavamo na II-oj logaritamskoj jedinici skale K, prema tome njegov će broj mjesta c biti:

$$c = 3n - 1 = 3 \cdot 1 - 1 = 2.$$

Konačno treći kub »1—9—2« leži na trećoj logaritamskoj jedinici skale K, njegov je broj mjesta $c = 3n = 3 \cdot 1 = 3$.

Primjeri:

$3{,}24^3 = 34{,}0$ II log. jed. sk. K $c = 3n - 1 = 3 \cdot (+1) - 1 = +2$

$0{,}203^3 = 0{,}00836$ I log. jed. sk. K $c = 3n - 2 = 3 \cdot (0) - 2 = -2$

$0{,}535^3 = 0{,}153$ III log. jed. sk. K $c = 3n = 3 \cdot (0) = 0$

$15{,}32^3 = 3600$ I log. jed. sk. K $c = 3n - 2 = 3 \cdot (+2) - 2 = +4$

$0{,}0383^3 = 0{,}0000563$ II log. jed. sk. K $c = 3n - 1 = 3 \cdot (-1) - 1 = -4$

$705^3 = 350000000$ III log. jed. sk. K $c = 3n = 3 \cdot (+3) = +9$

$\pi^3 = 31{,}0$ II log. jed. sk. K $c = 3n - 1 = 3 \cdot (+1) - 1 = +2$

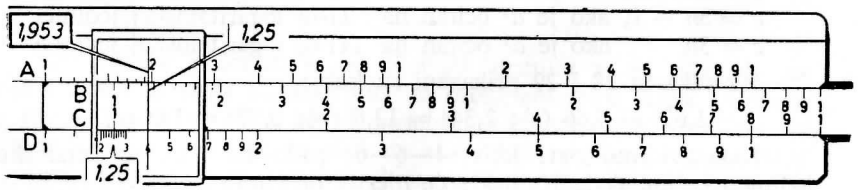
$0{,}00917^3 = 0{,}000000771$ III log. jed. sk. K $c = 3n = 3 \cdot (-2) = -6$

$21{,}05^3 = 9330$ I log. jed. sk. K $c = 3n - 2 = 3 \cdot (+2) - 2 = +4$

$10{,}69^3 = 1219$ I log. jed. sk. K $c = 3n - 2 = 3 \cdot (+2) - 2 = +4$

Kubna skala K pruža velike koristi, ali ova skala nije bezuvjetno nužna jer i računalo koje nema ove skale, npr. računalo predočeno na slici 2, daje kub svakog broja. U ovom se slučaju kub a^3 rastavlja u dva faktora a^2 i a. Iz ovoga je računski postupak već jasan. Uzmimo jedan primjer:

$$1{,}25^3 = 1{,}25^2 \cdot 1{,}25 = 1{,}953 \text{ (sl. 31).}$$



Sl. 31.

Iznad »1—2—5« donje skale D štapa stavimo početnu crtu donje skale C jezika. Iznad početne crte gornje skale B jezika leži sada na gornjoj skali A štapa $1{,}25^2$. Ne očitavamo ovaj kvadrat, već ga odmah množemo s drugim faktorom »1—2—5«. U tu svrhu, ne dirajući jezika, stavimo crtu kazaljke na »1—2—5« gornje skale B jezika, pa traženi rezultat »1—9—5—3« očitamo na gornjoj skali A štapa.

Ako je broj koji se kubira veći od »4—6—4« (jer je $4{,}64 = \sqrt[3]{100}$), morat ćemo iznad ovoga broja, uzetoga na skali D, namjestiti ne početnu već konačnu crtu skale C, jer inače ne bismo mogli da izvršimo množenje s drugim faktorom.

Primjer:

$$0{,}497^3 = 0{,}497^2 \cdot 0{,}497 = 0{,}123$$

Za vježbanje služit će nam gore navedeni primjeri za određivanje kuba.

14.3. Određivanje trećeg korijena

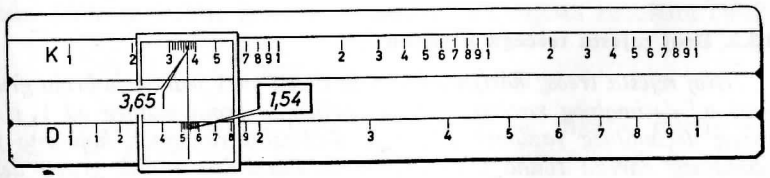
14.3.1. Računanje

Rekli smo već da svakom broju uzetom na kubnoj skali K odgovara na donjoj skali D štapa treći korijen tog broja. Prema tome ako crtom kazaljke (ili rubnim indeksom kazaljke) postavimo radikand na kubnoj skali K, očitat ćemo ispod crte kazaljke na donjoj skali D štapa traženi treći korijen.

Primjer:

$$\sqrt[3]{3{,}65} = 1{,}54 \quad \text{(sl. 32).}$$

Postavimo crtom kazaljke (ili rubnim indeksom kazaljke) radikand »3—6—5« na skali K pa traženi treći korijen »1—5—4« očitamo ispod crte kazaljke na donjoj skali D štapa.



Sl. 32.

Na slici 33 prikazani su još primjeri:

$$\sqrt[3]{29{,}5} = 3{,}09$$

$$\sqrt[3]{74{,}1} = 4{,}2$$

Kao i pri određivanju drugog korijena imamo i kod trećeg korijena teškoća gdje da postavimo radikand: na I-oj, II-oj ili III-oj logaritamskoj jedinici kubne skale K.

Da riješimo ovo pitanje i da u isti mah omogućimo mehaničko određivanje položaja decimalnog zareza u trećem korijenu postupat ćemo isto kao pri određivanju drugog korijena.

Radikande veće od 1 dijelimo od decimalnog zareza na lijevo u grupe od *tri* brojke, a radikande manje od 1 dijelimo na desno od decimalnog zareza u grupe od tri brojke.

Zvat ćemo opet mjerodavnom grupom za brojeve veće od jedan krajnju lijevu grupu, a za brojeve manje od jedan prvu grupu na desno od decimalnog zareza koja nije nulta grupa, tj. nije (000).

Prema tome mjerodavna grupa sadržavat će ili jedno mjesto [npr. (5), (003) itd.] ili dva mjesta [npr. (34), (085)] ili tri mjesta [npr. (192), (700)].

Opće pravilo za određivanje trećeg korijena glasit će:

Radikand se postavi crtom kazaljke (ili rubnim indeksom kazaljke) na kubnoj skali K *štapa i to na* I*-oj logaritamskoj jedinici ove skale, ako mjerodavna grupa radikanda ima jedno mjesto; ili na* II*-oj logaritamskoj jedinici te skale, ako mjerodavna grupa ima dva mjesta; ili konačno na* III*-oj logaritamskoj jedinici, ako mjerodavna grupa ima tri mjesta, a traženi treći korijen očita se ispod crte kazaljke na donjoj skali* D *štapa.*

Za mehaničko određivanje položaja decimalnog zareza u traženoj vrijednosti trećeg korijena služi isto pravilo koje smo naveli kod drugog korijena, jer ono vrijedi za svaki korijen s pozitivnim cijelim eksponentom.

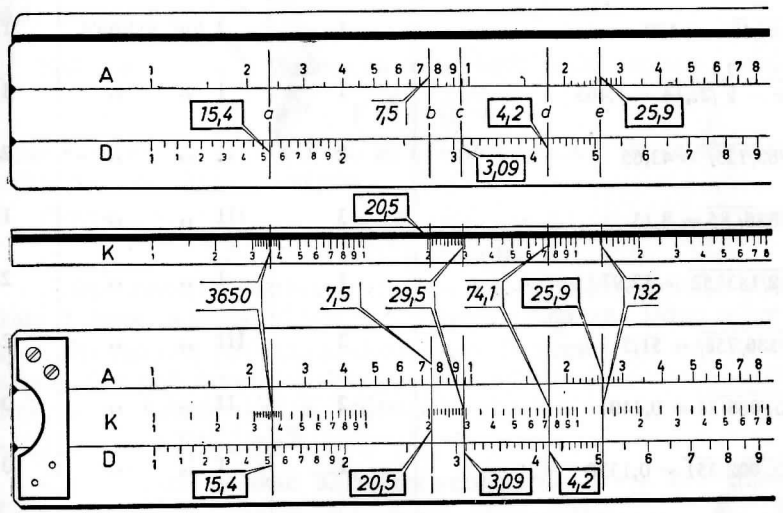
14.3.2. Broj mjesta trećega korijena

Broj mjesta trećeg korijena iz broja većeg od 1 *jednak je broju grupa lijevo od decimalnog zareza, a treći korijen iz broja manjeg od* 1, *tj. iz pravog decimalnog razlomka, opet je decimalni razlomak koji ima iza decimalnog zareza toliko nula koliko radikand ima nultih grupa desno od tog zareza.*

Vježbajmo se:

$$\sqrt[3]{|192|} = 5{,}77 \text{ (slika 29)}$$

Radikand 192 ima jednu grupu i ta mjerodavna grupa ima tri mjesta. Prema tome postavit ćemo radikand na III-oj logaritamskoj jedinici kubne skale K štapa, a traženi rezultat imat će (+ 1) mjesto.



Sl. 33.

$$\sqrt[3]{|3|650|} = 15{,}4 \text{ (slika 33)}$$

Radikand 3650 ima dvije grupe, a mjerodavna grupa /3/ ima jedno mjesto. Mjesto postavljanja radikanda je dakle I-va logaritamska jedinica kubne skale K štapa, a broj mjesta rezultata (+ 2).

$$\sqrt[3]{|29|,5} = 3{,}09 \text{ (slika 33)}$$

Mjerodavna grupa radikanda /29/ ima dva mjesta, mjesto postavljanja je prema tome II-a logaritamska jedinica skale K, a broj mjesta rezultata (+ 1).

Isti primjeri prikazani su u sl. 33 i na računalu novijeg sustava.

Primjeri:

Zadatak	Broj mjesta mjerodavne grupe (deblje tiskano)	Mjesto postavljanja radikanda na kubnoj skali K	Broj mjesta korijena
$\sqrt[3]{\mathbf{1},48} = 1{,}139$	1	I log. jedinica	1
$\sqrt[3]{\pi} = \sqrt[3]{\mathbf{3},14} = 1{,}465$	1	I „ „	1
$\sqrt[3]{\mathbf{83},125} = 43{,}65$	2	II „ „	2
$\sqrt[3]{\mathbf{536},85} = 8{,}13$	3	III „ „	1
$\sqrt[3]{\mathbf{2},183{,}52} = 12{,}97$	1	I „ „	2
$\sqrt[3]{\mathbf{136},758} = 51{,}5$	3	III „ „	2
$\sqrt[3]{0{,}\mathbf{085},31} = 0{,}440$	2	II „ „	0
$\sqrt[3]{0{,}\mathbf{002},351} = 0{,}1330$	1	I „ „	0
$\sqrt[3]{0{,}\mathbf{235},1} = 0{,}617$	3	III „ „	0
$\sqrt[3]{0{,}7} = \sqrt[3]{0{,}700} = 0{,}888$	3	III „ „	0
$\sqrt[3]{0{,}000\,\mathbf{020},8} = 0{,}0275$	2	II „ „	−1
$\sqrt[3]{0{,}000\,\mathbf{001},87} = 0{,}01232$	1	I „ „	−1
$\sqrt[3]{0{,}08} = \sqrt[3]{0{,}\mathbf{080}} = 0{,}431$	2	II „ „	0
$\sqrt[3]{0{,}000\,000\,\mathbf{5}} = 0{,}00794$	3	III „ „	−2
$\sqrt[3]{\mathbf{80},12} = 4{,}31$	2	II „ „	1

15. POTENCIJE S EKSPONENTIMA 3/2 i 2/3

Ako računalo ima kubnu skalu K možemo potencije s razlomljenim eksponentima $\frac{3}{2}$ i $\frac{2}{3}$ vrlo jednostavno izračunati postavivši kubnu skalu K u vezu sa gornjom skalom A štapa.

15.1. Oblici tipa $a^{3/2}$

Neka se traži $a^{3/2}$. Budući da se taj izraz može napisati i ovako:

$$a^{3/2} = \sqrt{a^3} = (\sqrt{a})^3$$

računat ćemo prvo $\sqrt{a}$ pa ćemo ga odmah kubirati a da ne očitavamo vrijednosti tog drugog korijena.

Primjer:

$$7{,}5^{3/2} = (\sqrt{7{,}5})^3 = 20{,}5 \text{ (sl. 33)}$$

Crtom kazaljke postavimo na I-oj logaritamskoj jedinici gornje skale A štapa radikand »7—5« (mjerodavna grupa ima jedno mjesto), ispod crte kazaljke leži sada na donjoj skali D štapa $\sqrt{7{,}5}$ koji ne očitavamo, jer pod crtom kazaljke (ili pod rubnim indeksom kazaljke) stoji već na kubnoj skali K vrijednost kuba tog drugog korijena, tj. vrijednost $(\sqrt{7{,}5})^3 = 7{,}5^{3/2}$.

Čitamo dakle na skali K traženi rezultat »2—0—5«. Broj mjesta: $1 \cdot 3 - 1 = 2$.

Prema tome se $a^{3/2}$ računa ovako: *crtom kazaljke postavi se »a« na gornjoj skali* A *štapa, pa se traženi rezultat očita ispod crte kazaljke (ili ispod rubnog indeksa kazaljke) na kubnoj skali* K.

Položaj radikanda na skali A štapa i broj mjesta u rezultatu određujemo prema već poznatim pravilima za drugi korijen i kub.

Primjeri:

$22{,}7^{3/2} = 108$ Broj mjesta: $+1 \cdot 3 = 3$

$0{,}0001297^{3/2} = 0{,}00000148$ Broj mjesta: $-1 \cdot 3 - 2 = -5$

$0{,}10731^{3/2} = 0{,}0350$ Broj mjesta: $0 \cdot 3 - 1 = -1$

$0{,}00308^{3/2} = 0{,}000171$ Broj mjesta: $-1 \cdot 3 = -3$

$0{,}002^{3/2} = 0{,}0000893$ Broj mjesta: $-1 \cdot 3 - 1 = -4$

15.2. Oblici tipa $a^{2/3}$

Obrnuto se postupa pri računanju $a^{2/3} = \sqrt[3]{a^2} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2$.

Crtom kazaljke (ili rubnim indeksom kazaljke) postavi se »a« na kubnoj skali K *pa se traženi rezultat očita na gornjoj skali* A *štapa.*

Gdje će se postaviti radikand *a* na skali K kao i decimalni zarez u traženom rezultatu služe pravila navedena gore kod određivanja trećeg korijena i kvadriranja.

Primjeri:

$132^{2/3} = 25{,}9$ (slika 33)	Broj mjesta: $1 \cdot 2 = 2$
$5{,}2^{2/3} = 3{,}00$	Broj mjesta: $1 \cdot 2 - 1 = 1$
$0{,}000721^{2/3} = 0{,}00805$	Broj mjesta: $-1 \cdot 2 = -2$
$0{,}062^{2/3} = 0{,}157$	Broj mjesta: $0 \cdot 2 = 0$
$0{,}0062^{2/3} = 0{,}0337$	Broj mjesta: $0 \cdot 2 - 1 = -1$
$0{,}00062^{2/3} = 0{,}00728$	Broj mjesta: $-1 \cdot 2 = -2$

Mogućnost primjene računala s kubnom skalom K nije ni izdaleka iscrpljena gore navedenim slučajevima. Mogao bi se navesti čitav niz interesantnih primjera ove primjene. Npr. možemo da računamo šesti, deveti, dvanaesti itd. korijen.

$$\left(\sqrt[6]{a} = \sqrt[3]{\sqrt{a}};\quad \sqrt[9]{a} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{a}} \quad \text{itd.}\right).$$

Ali promatranje ovih slučajeva nije potrebno jer vježbom lako sami kombiniramo nove postupke da što prije i sigurnije dođemo do traženog rezultata.

16. LOGARITMIRANJE

16.1. Određivanje karakteristike logaritma

Općenito se potencije s razlomljenim, odnosno bilo kakvim eksponentima računaju logaritamskim putem. U tu svrhu računalo ima jednoličnu skalu L (slike 5, 6 i 35), koja daje mantise logaritama sviju brojeva uzetih na donjoj skali D štapa. Drugim riječima *skale* D *i* L *su logaritamske tablice na tri do četiri decimale.* Karakteristike logaritama

odredimo sami služeći se poznatim pravilom da karakteristika logaritma broja većeg od 1 ima toliko pozitivnih jedinica, koliko zadani broj u svom cijelom dijelu ima mjesta manje jedno mjesto, a da karakteristika pravog decimalnog razlomka ima toliko negativnih jedinica, koliko razlomak ima nula oko decimalnog zareza, računajući i nulu ispred toga zareza. Npr.: log 1,031 ima karakteristiku 0; log 378 ima karakteristiku 2;, log 0,891 ima karakteristiku -1; log 0,005 ima karakteristiku -3, itd.*

16.2. Skala L

Skala L, koja daje mantise brojeva uzetih na donjoj skali D nalazi se kod nekih sustava računala, npr. sustava »Rietz«, na prednjoj strani štapa. Ona je najdonja skala štapa (slike 5 i 34). Na nekim računalima smještana je skala L u sredini stražnje strane jezika te se očitava pomoću naročite indeksne crte nanesene u desnom isjeku štapa (sl. 35). U ovom slučaju ide razdioba skale L zdesna nalijevo.

Na računalu sustava »Darmstadt« smještena je skala L na zadnjem rubu štapa te se očitanja i postavljanja na toj skali vrše pomoću posebne indeksne crte nanesene na okviru kazaljke (vidi sl. 6).

Pri postavljanju odnosno očitavanju na skali L držat ćemo na umu da početna crta skale L ima vrijednost 0.

16.3. Određivanje mantise logaritma i antilogaritmiranje

Ako je skala L na prednjoj strani štapa ili na zadnjem rubu štapa logaritmiranje se vrši na ovj način: *broj koji se logaritmira postavi se crtom kazaljke na donjoj skali* D *štapa pa se mantisa traženog logaritma očita na skali* L *štapa ispod crte kazaljke, odnosno iznad rubnoga indeksa kazaljke.*

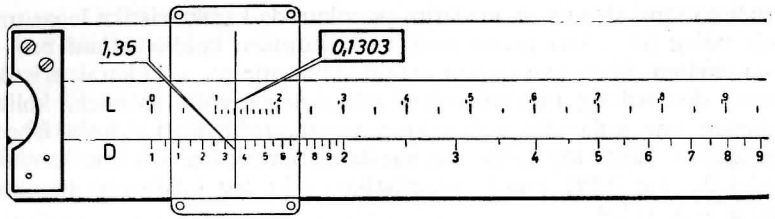
Primjer:

$$\log 1{,}35 = 0{,}1303 \text{ (sl. 34).}$$

Obrnuto se vrši antilogaritmiranje. *Mantisa logaritma postavi se crtom kazaljke na skali* L, *pa se traženi broj očita ispod crte kazaljke na donjoj skali* D *štapa.*

---

* Vidi od istog pisca: Repetitorij elementarne matematike, Tehnička knjiga, Zagreb.

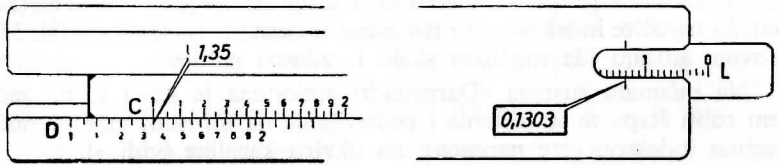


Sl. 34.

Primjer: numerus (1,899) = 79,3

Ako se skala L nalazi na stražnjoj strani jezika logaritmira se ovako:

Primjer: log 1,35 = 0,1303 (sl. 35)



Sl. 35.

Stavimo početnu crtu donje skale C jezika iznad broja »1—3—5« donje skale D štapa, okrenemo računalo oko njegove uzdužne osi, pa očitajmo na skali L iznad desne donje indeksne crte štapa traženu mantisu 0,1303.

Obrnuto: pri antilogaritmiranju pomicanjem jezika stavimo mantisu logaritma, uzetu na skali L, iznad desne donje indeksne crte štapa, pa traženi broj očitamo na donjoj skali D štapa ispod početne crte donje skale C jezika.

Primjeri:

log 0,313	= 0,496 — 1
log 5,15	= 0,712
log 0,01103	= 0,043 — 2
num. (0,601)	= 3,99
num. (0,037 — 1)	= 0,1089
num. (0,274 — 3)	= 0,00188

Vježbajmo se u logaritmiranju i antilogaritmiranju kontrolirajući dobivene rezultate pomoću logaritamskih tablica.

17. POTENCIJE S EKSPONENTIMA UZETIM PO VOLJI

Pošto znamo očitavati logaritme s računala, prelazimo na računanje potencija s eksponentima uzetim po volji.

Traži se:

$$a^s = x$$

gdje je s bilo kakav cijeli broj ili razlomak.

Logaritmirajući imamo:

$$s \cdot \log a = \log x$$

Odatle:

$$x = a^s = \text{numerus } (s \cdot \log a)$$

Dobiveni izraz kazuje: *da izračunamo* a^s *moramo odrediti log a, množiti ga sa s pa od produkta uzeti antilogaritam.*

Sve se ove operacije naravno izvode na računalu.

Primjeri:

$$\sqrt[7]{38,7} = 1,687$$

Znamo da je $\sqrt[7]{38,7} = \text{numerus}\left(\frac{1}{7}\log 38,7\right)$

Logaritmiramo pomoću skala D i L: log 38,7 = 1,588, dalje dijelimo na skalama D i C: $\frac{1588}{7} = 0,227$ i konačno antilogaritmiramo na skalama L i D: numerus (0,227) = 1,687.

$$1,286^{1,43} = 1,432$$

Računamo: log 1,286 = 0,109; $1,432 \cdot 0,109 = 0,1562$;

numerus (0,1562) = 1,432

$$\pi^{3,2} = 38,9$$

Računamo: log π = 0,497; $3,2 \cdot 0,497 = 1,590$

numerus (1,590) = 38,9

$$(2,08)^{5/7} = \sqrt[7]{(2,08)^5} = 1,687$$

Računamo: $\frac{5}{7}\log 2,08 = \frac{5 \cdot 0,318}{7} = 0,227 = \log 1,687$

Računa li se korijen s pozitivnim cijelim eksponentom, položaj decimalnog zareza određuje se obično prema već poznatim pravilima. U ovom se slučaju pri računanju umjesto karakteristike zadanog broja upotrebljava karakteristika mjerodavne grupe radikanda, što će mnogo pojednostaviti računanje i povećati njegovu tačnost.

Primjeri:

$$\sqrt[5]{/\,13/55000/} = 16{,}84$$

Traženi rezultat ima (+ 2) mjesta, jer radikand sadrži dvije grupe (kod petoga korijena potpuna grupa sadrži pet znamenaka, a kod n-toga korijena n znamenaka). Karakteristika radikanda je 6, karakteristika mjerodavne grupe /13/ je 1.

Računamo: $\frac{\log\ 13{,}55}{5} = \frac{1{,}132}{5} = 0{,}226 = \log 1{,}684$

$$(0{,}00000752)^{1/7} = \sqrt[7]{/\,0{,}/0000075/2} = 0{,}1854$$

Rezultat ima (0) mjesta, jer je radikand pravi razlomak, a nema nulte grupe iza decimalnog zareza.

Računamo: $\frac{\log\ 75{,}2}{7} = \frac{1{,}876}{7} = 0{,}268 = \log 1{,}854$

Mnogo se jednostavnije računaju potencije s bilo kakvim eksponentima pomoću dvostruke logaritamske skale (log—log—skale) koju imaju neka računala, npr. računalo sustava »Darmstadt« prikazano na slici 6. O tome će biti govora kasnije.

18. ODREĐIVANJE RECIPROČNIH VRIJEDNOSTI

Traži se recipročna vrijednost broja a, tj. $\frac{1}{a}$, gdje je a kakavgod cio broj ili decimalni razlomak pravi ili nepravi. Mjesto da računamo $\frac{1}{a}$ računat ćemo $\frac{10}{a}$. Dobiveni rezultat bit će deset puta veći od traženog, ali to nije važno pri računanju pomoću računala, jer kako je već

češće naglašeno logaritamsko računalo ne daje neposredno položaj decimalnog zareza u rezultatu.

Neka je $\frac{a}{10} = x$

Logaritmiramo:

$$\log x = \log 10 - \log a = 1 - \log a$$

Odatle: $x = \frac{10}{a} = \text{numerus}\ (1 - \log a)$

Ovaj izraz kazuje: uzmemo li logaritamsku skalu dugu jednu logaritamsku jedinicu (npr. skalu C ili D računala) pa od njezina desnog kraja oduzmemo dužinu log a, tj. nanesemo tu dužinu lijevo od konačne crte logaritamske skale, očitat ćemo na toj logaritamskoj skali pod lijevim krajem nanesene dužine recipročnu vrijednosti $\frac{10}{a}$, odnosno $\frac{1}{a}$.

Da uočimo pravilnost ove činjenice uzmimo u šestar npr. sa skale D računala dužinu log 2, tj. razmak »1« do »2«, pa ga nanesemo na lijevo od konačne crte iste skale D. Lijevi šiljak šestara past će u crtu »5«, jer je $\frac{10}{2} = 5$ ili $\frac{1}{2} = 0{,}5$.

Prema tome ako izvadimo jezik iz štapa, okrenemo ga tako da gornja strana ostane gore (pri čemu će sada brojke jezika stajati naglavce) pa ga u ovom položaju opet stavimo u štap i to tako da se početne crte skala podudaraju, promijenit će skale B i C svoj položaj i smisao razdiobe. Sad će iznad svakoga broja skale D štapa ležati na skali C jezika recipročna vrijednost toga broja i obrnuto: svakom broju skale C odgovarat će na skali D recipročna vrijednost dotičnog broja.

Da se isključi ovo nezgodno vađenje i okretanje jezika, računala novijih sustava imaju skalu recipročnih vrijednosti R, koja je nanesena u sredini prednje strane jezika obično crvenom bojom (slike 5, 6 i 36). Ta skala ima istu razdiobu kao i skale C i D, ali je smisao te razdiobe protivan.

Na nekim računalima ta skala nosi oznaku CI.

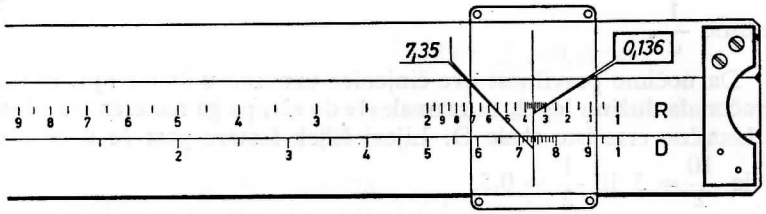
Da se odredi recipročna vrijednost $\frac{1}{a}$ *zadanoga broja a postavi se crtom kazaljke broj »a« na donjoj skali* C *jezika, a tražena se recipročna*

vrijednost $\frac{1}{a}$ *očita na skali recipročnih vrijednosti* R; *može se broj a postaviti i na skali* R *pa se njegova recipročna vrijednost* $\frac{1}{a}$ *očita na skali* C.

Pri postavljanju i čitanju brojeva na skali R *treba uvijek držati na pameti da razdioba te skale ide od desna na lijevo. Crvena boja te skale neka nas podsjeća na to!*

Razumije se da recipročna vrijednost $\frac{1}{a}$ može biti određena na skali R i pomoću donje skale D štapa, ako jezik ima svoj *osnovni položaj*, tj. ako se podudaraju početne i konačne, dakle i sve ostale crte identičnih skala štapa i jezika. Na taj je način riješen slijedeći primjer.

Primjer: $\frac{1}{7{,}35} = 0{,}136$ (slika 36)



Sl. 36.

Postavivši jezik u osnovni položaj, stavimo crtu kazaljke na broj »7—3—5« donje skale D štapa, pa traženu recipročnu vrijednost »1—3—6« očitamo ispod crte kazaljke na skali recipročnih vrijednosti R jezika.

Pokušamo li da recipročnu vrijednost $\frac{1}{a}$ broja a odredimo kao kvocijent, tj. dijeljenjem 1 i a na skalama C i D, vidjet ćemo da će traženi rezultati ležati na skali D štapa uvijek ispod konačne crte donje skale C jezika, tj. broj mjesta rezultata bio bi uvijek jednak algebarskoj razlici brojeva mjesta dividenda 1 i divizora a bez ikakvog dodatka. Prema tome:

Broj mjesta recipročne vrijednosti $\frac{1}{a}$ *zadanoga broja a jednak je broju mjesta od a uzetom s protivnim predznakom* $+1$.

$\frac{1}{25{,}7} = 0{,}0389$; broj mjesta: $(-2) + 1 = -1$

$\frac{1}{1038} = 0{,}000963$; broj mjesta: $(-4) + 1 = -3$

$\frac{1}{0{,}809} = 1{,}236$; broj mjesta: $(0) + 1 = +1$

$\frac{1}{0{,}0004325} = 2312$; broj mjesta: $(+3) + 1 = +4$

$\frac{1}{\pi} = 0{,}3183$; broj mjesta: $(-1) + 1 = 0$

Pomoću skale recipročnih vrijednosti R može se često jednostavnije računati mnoge oblike.

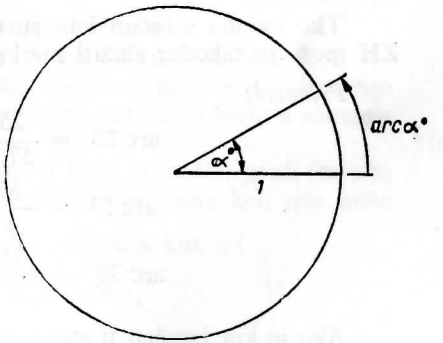
19. ODREĐIVANJE LUČNE MJERE KUTA (arc α)

Pod lučnom mjerom kuta α razumije se dužina luka u kružnici polumjera 1 koja pripada središnjem kutu α, a označuje se s arc α (latinski arcus znači luk).

U tu svrhu napišimo razmjer:

arc $\alpha^\circ : 2\pi = \alpha^\circ : 360^\circ$. Odatle:

$$\alpha^\circ = \frac{360^\circ \cdot \text{arc}\,\alpha^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \text{arc}\,\alpha^\circ \qquad (1).$$



Sl. 37.

Kvocijent

$$\frac{180^\circ}{\pi} = \frac{180^\circ}{3{,}14159} = 57^\circ{,}296$$

naziva se *radijant* pa se označuje s ρ°.

Kako vidimo radijant ρ° je središnji kut kome odgovara kružni luk dužine jednog polumjera, tj. arc ρ° = polumjer = 1.

Znamo dakle:

$$\rho^\circ = 57{,}3^\circ$$

ili u minutama $\rho' = 3438'$

ili u sekundama $\rho'' = 206265''$

Ako u formuli (1) zamijemo $\frac{180^\circ}{\pi}$ s ρ° imat ćemo:

$$\alpha^\circ = \rho^\circ \cdot \operatorname{arc} \alpha^\circ;$$

odatle:

$$\operatorname{arc} \alpha^\circ = \frac{\alpha^\circ}{\rho^\circ}$$

li

$$\operatorname{arc} \alpha^\circ = \frac{\alpha'}{\rho'} \quad \text{ili} \quad \operatorname{arc} \alpha^\circ = \frac{\alpha''}{\rho''}$$

Prema tome arc α *odredi se tako da se zadani kut* α *podijeli na skalama* C *i* D *računala s* ρ, *izraženim u istim jedinicama u kojima i kut* α; *dakle ako je kut* α *izražen u stupnjevima, dijeli se s* 57,296°, *ako je izražen u minutama, dijeli se sa* 3438', *a ako je izražen u sekundama dijeli se s* 206265''.

Na donjoj skali C jezika, a kadšto i na donjoj skali D štapa, vrijednosti »3438« i »206265« označene su posebnim crticama sa znakovima ρ' i ρ'' (što znači znak $\rho_{,,}$ vidi dalje). Pri određivanju položaja decimalnog zareza pamtimo da ρ' ima »+4« mjesta, a ρ'' ima »+6« mjesta.

Tko računa s računalom sustava »Darmstadt« br. 21 Z ili br. 21 ZH može se također služiti markama 1°, 1' i 1'' [vidi dalje 20. 3.2.1.]

Primjeri:

$$\operatorname{arc} 25^\circ = \frac{25^\circ}{57{,}3^\circ} = 0{,}436$$

$$\operatorname{arc} 53' = \frac{53'}{\rho'} = 0{,}01541$$

$$\operatorname{arc} 38'' = \frac{38''}{\rho''} = 0{,}0001843$$

Ako je kut izražen u stupnjevima i minutama pretvaramo minute u decimalne dijelove stupnja i to tako da minute dijelimo sa 6, jer je $0{,}1^\circ = \frac{60}{10} = 6'$. Na isti se način postupa ako je kut izražen u minutama i sekundama

Primjeri:

$$\operatorname{arc} 25^\circ\ 18' = \operatorname{arc} 25{,}3^\circ = \frac{25{,}3^\circ}{57{,}3^\circ} = 0{,}442$$

$$\operatorname{arc} 64^\circ\ 50' = \operatorname{arc} 64{,}8^\circ = \frac{64{,}8^\circ}{57{,}3^\circ} = 1{,}132$$

$$\operatorname{arc} 13'\ 10'' = \operatorname{arc} 13{,}17' = \frac{13{,}17'}{\rho'} = 0{,}00383$$

Obrnuti zadatak, tj. *određivanje kuta iz njegove lučne mjere,* vrši se tako da se zadana lučna mjera arc α pomnoži na skalama C i D računala sa $\rho^\circ = 57{,}3^\circ$ ili sa znakom ρ' ili ρ'' pa se traženi kut α dobije izražen u stupnjevima, minutama, odnosno sekundama

Kako je lučna mjera kutova, koji su veći od 6°, veća od 0,1, a arc 1' = 0,00029, preporučuje se zadanu vrijednost arc α množiti sa $\rho^\circ = 57{,}3^\circ$, ako arc α ima broj mjesta »0« ili veći od »0«, odnosno sa ρ', ako broj mjesta nije manji od »— 3«, da se traženi kut neposredno dobije u stupnjevima, odnosno u minutama. Vrijednosti arc α, koje su manje od 0,00029, množimo sa ρ'' da kut dobijemo u sekundama.

Primjeri:

arc $\alpha = 0{,}564$ $\quad \alpha = 0{,}564 \cdot 57{,}3^\circ = 32{,}3^\circ = 32^\circ 18'$

arc $\alpha = 1{,}267$ $\quad \alpha = 1{,}267 \cdot 57{,}3^\circ = 72{,}6^\circ = 72^\circ 36'$

arc $\alpha = 0{,}00262$ $\quad \alpha = 0{,}00262 \cdot \rho' = 9'$

arc $\alpha = 0{,}01382$ $\quad \alpha = 0{,}01382 \cdot \rho' = 47{,}5' = 47'30''$

arc $\alpha = 0{,}00028$ $\quad \alpha = 0{,}00028 \cdot \rho'' = 58''$

Znak $\rho_{,,}$ koji je nanesen između crta 6 i 7 na donjoj skali C jezika, a kadšto i na donjoj skali D štapa, ima drugu vrijednost nego znak ρ'', a služi za izračunavanje lučne mjere kutova zadanih u »novim« sekundama.

U novije vrijeme dijeli se pravi kut u 100^g, tj. u 100 gradi (mjesto u 90 stupnjeva), 1^g u 100^c, a 1^c u 100^{cc}. Prema tome kod ove nove razdiobe u jediničnoj kružnici luku $\frac{\pi}{2}$ odgovara kut od

$$100^g = 10000^c = 1000000^{cc},$$

a luku dužine 1 kut

$$\rho'' = \frac{1000000^{cc}}{\frac{\pi}{2}} = 636620^{cc}.$$

Pomoću ovog znaka može se dakle izračunati koji kut, izražen u »novim«

sekundama, odgovara zadanoj lučnoj mjeri i obrnuto: koja lučna mjera odgovara kutu zadanom u »novim« sekundama U prvom se slučaju zadana veličina množi, a u drugom slučaju dijeli sa ρ_{cc} pamteći da ρ_{cc} ima »+ 6« mjesta

Primjeri:

$$\text{arc } 78{,}5^g = \frac{785000^{cc}}{\rho_{cc}} = 1{,}233$$

$$\text{arc}\,\alpha = 0{,}564; \quad \alpha = 0{,}564 \cdot \rho_{cc} = 359000^{cc} = 35{,}9^g.$$

20. ODREĐIVANJE PRIRODNIH VRIJEDNOSTI GONIOMETRIJSKIH FUNKCIJA

20.1. Općenito o određivanju vrijednosti funkcija sinusa i tangensa

Određivanje prirodnih vrijednosti goniometrijskih funkcija vrši se posebnim skalama koje predočuju funkcijske skale za $y = \log \sin x$, $y = \log \text{tg}\, x$ itd., tj. naneseni su kao dužine logaritmi prirodnih vrijednosti goniometrijskih funkcija pri čemu je linearna jedinica tih skala jednaka ili jedinici donje skale D štapa, odnosno donje skale C jezika ili jedinici gornje skale A štapa, odnosno gornje skale B jezika.

Da upotreba trigonometrijskih skala računala bude potpuno jasna moraju se dobro znati načela na temelju kojih se pomoću tih skala određuju vrijednosti trigonometrijskih funkcija.

U tu svrhu uzmimo logaritamske tablice i izvadimo podatke donjih tabela iz tablica: »Prirodne goniometrijske funkcije«, »Logaritmi goniometrijskih funkcija« i »Duljine kružnih lukova«.

SINUS

Kut α	Dužina luka koja odgovara kutu u kružnici radijusa 1, tj. arc α	sin α	log sin α	Dužina logaritamske skale
0 do 34′	0 do 0,00989	0 do 0,00989	—	—
34′ do 5°44′	—	0,01 do 0,1	− 2 do − 1	1 log. jedinica
5°44′ do 90°	—	0,1 do 1	− 1 do 0	1 log. jedinica

Kut α	Dužina luka koja odgovara kutu u kružnici radijusa 1, tj. arc α	tg α	log tg α	Dužina logaritamske skale
0 do 34′	0 do 0,00989	0 do 0,00989	—	—
34′ do 5°43′	—	0,01 do 0,1	− 2 do − 1	1 log. jedinica
5°43′ do 45°	—	0,1 do 1	− 1 do 0	1 log. jedinica

1) Iz prvih redaka gornjih tabela vidimo da se za kutove od 0 do 34′ vrijednosti sin α, tg α i arc α podudaraju sve do uključivo pete decimale. Prema tome pri određivanju vrijednosti sinusa i tangensa kutova manjih od 34′ pomoću računala uzima se uvijek da je $\sin \alpha = \text{tg}\, \alpha = \text{arc}\, \alpha$, tj. dužini luka u kružnici polumjera 1 koja pripada zadanom kutu α (vidi 19.).

2) Iz drugih redaka gornjih tabela izlazi da se vrijednosti sinusa i tangensa kutova manjih od 5°44′ podudaraju, naravno u granicama tačnosti koje nam daje računalo.

20.2. Računala s trigonometrijskim skalama smještenim na stražnjoj strani jezika

20.2.1. Opis trigonometrijskih skala tih računala

t20.2.1.1. *Općenito o tim skalama*

Određivanje prirodnih vrijednosti goniometrijskih funkcija vrši se na skalama koje su na većini računala smještene na stražnjoj strani jezika. Sasvim drugi smještaj i razdiobu trigonometrijskih skala imaju računala sustava »Darmstadt« (vidi sl. 6), stoga ćemo o tim skalama i njihovoj upotrebi govoriti posebno (vidi 20.3.1). Za postavljanje, odnosno očitanje na trigonometrijskim skalama, smještenim na stražnjoj strani jezika, nanesene su u lijevom i desnom isječku stražnje strane štapa indeksne crte (vidi sl. 38, 39 i 40).

Dok neki sustavi računala imaju na stražnjoj strani jezika tri trigonometrijske skale i to:

S — sinus-skalu,
S & T — sinus i tangens-skalu,
T — tangens-skalu (sl. 38),

drugi sustavi računala imaju samo dvije trigonometrijske skale S i T, a sredina stražnje strane jezika zauzeta je skalom L (sl. 35).

Na skali S nalazi se funkcijska skala funkcije $y = \log \sin x$, tj. nanesene su kao dužine logaritmi sinusa šiljatih kutova; linearna jedinica te skale jednaka je na računalima s tri trigonometrijske skale jedinici donje skale C jezika, a na računalima s dvije trigonometrijske skale jedinici gornje skale B jezika.

Na skali T nanesene su kao dužine logaritmi tangensa kutova od 5°44′ do 45°. Kod obiju se vrsta računala linearna jedinica te skale T podudara s jedinicom gornje skale C štapa.

Konačno na skali S & T naneseni su kao dužine logaritmi sinusa, odnosno tangensa kutova manjih od 5°44′ i to u jedinici donje skale C jezika.

Iz rečenoga jasno slijedi da ćemo vrijednosti sinusa i tangensa očitavati na računalima s tri trigonometrijske skale uvijek na donjoj skali C jezika, a na računalima s dvije trigonometrijske skale na gornjoj skali B jezika za sinus i na donjoj skali C jezika za tangens.

Prema vrijednostima navedenim u gornjim tablicama »Sinus« i »Tangens« i s obzirom na primjedbe 1) i 2) koje iza tih tablica slijede, imaju računala s tri trigonometrijske skale za određivanje vrijednosti sinusa i tangensa kutova od 34′ do 5°44′ jednu zajedničku skalu. To je srednja skala S & T stražnje strane jezika. Računala koja nemaju te skale S & T vrijednosti sinusa i tangensa kutova od 34′ do 5°44′ određuju se pomoću gornje skale S stražnje strane jezika. Ova skala počinje prema tome na ovim vrstama računala s kutom 34′. dok na računalima s tri trigonometrijske skale ta skala S služi samo za određivanje vrijednosti sinusa i to počevši od kuta 5°44′.

Iz prednjih tabela vidimo dalje da su potrebne po dvije logaritamske jedinice za predočivanje goniometrijskih funkcija (sinusa za kutove od 34′ do 90° i tangensa za kutove od 34′ do 45°) pomoću logaritamskih skala.

S obzirom na to na računalima s tri trigonometrijske skale vrijednosti se sinusa očitavaju i za kutove od 34′ do 5°44′ i za kutove od 5°44′ do 90° na donjoj skali C jezika iznad konačne crte donje skale D štapa, dok se na računalima s dvije trigonometrijske skale vrijednosti sinusa očitavaju na gornjoj skali B jezika ispod konačne crte gornje skale A štapa, i to za kutove od 34′ do 5°44′ na I-oj logaritamskoj jedinici skale A štapa, a za kutove od 5°44′ do 90° na II-oj logaritamskoj jedinici te skale.

Vrijednost tangensa kutova od 5°43′ do 45° očitavaju se na računalima obiju vrsta na donjoj skali C jezika iznad *početne* crte donje skale D štapa.

Prije nego pređemo na određivanje vrijednosti goniometrijskih funkcija pomoću logaritamskoga računala valja da pažljivo proučimo razdiobu njegovih trigonometrijskih skala.

20.2.1.2. *Skala* S *na računalima s tri trigonometrijske skale*

Na računalima s tri trigonometrijske skale odgovara početna crta skale S kuta od 5°44′, a prva numerirana crta kutu od 6°. Do crte za 10° ima obično skala S crtice za svakih 5′ tako, da se i pojedine minute mogu lako postaviti i očitati.

Od 10° do 20° označuju crtice samo svakih 10′. Prema tome mogu se i tu ocijeniti pojedine minute.

Od 20° do 40° označuju crtice svakih 20′. U ovom dijelu skale možemo ocijeniti obično već svakih 5′.

Od 40° do 70° ide razdioba od 0,5 do 0,5 stupnja. Najbolje je da se tu postavljanja i očitanja vrše na desetine stupnja.

Od 70° do 80° vrijedi svaki najmanji razmak već 1°, a od 80° do 90° vrijedi 2,5°.

20.2.1.3. *Skala* S *na računalima s dvije trigonometrijske skale*

Na računalima s dvije trigonometrijske skale odgovara početna crta skale S kutu 34′,4, a prva numerirana kutu od 40′.

Do crtice za 1° ima skala S crtice za svaku pojedinu minutu, a od 1° do 2° za svake dvije minute.

Dalje do 10° vrijedi svaki najmanji razmak 5′, a od 10° do 20° vrijedi 10′.

Od 20° do 30° podijeljen je svaki stupanj u tri dijela, tj. najmanji razmak vrijedi 20′, a od 30° do 40° ide razdioba od 0,5 do 0,5 stupanja.

Dalje do 70° označeni su samo pojedini stupnjevi, od 70° do 80° svaka dva stupnja, a između 80° i 90° postoji samo jedna crtica za 85°.

20.2.1.4. *Skala* T

Razdioba skale T obično je ista na obje vrste računala. Prva crtica te skale odgovara kutu od 5°44′, a prva numerirana kutu od 6°. Skala T ima crtice od 5 do 5 minuta sve do 20°. Prema tome do toga mjesta skale jedna minuta može se još lako postaviti, odnosno očitati.

Od 20° do kraja skale, tj. do 45°, ide razdioba od 10 do 10 minuta, dakle se može i tu vršiti postavljanje i očitanje na jednu minutu tačno.

20.2.1.5. *Skala* S & T

Konačno se skala S & T na računalima s tri trigonometrijske skale počinje crticom od 34′4, a prva numerirana crtica odgovara kutu od 40′. Sve do crtice označene sa 1° ide razdioba od 0,5 do 0,5 minute. Prema tome u ovom razmaku vrše se postavljanja i očitanja u desetinama minute.

Na isti se način vrše postavljanja i očitanja i u razmaku od 1° do 3°, jer tu svaki razmak između susjednih crtica vrijedi 1′.

U razmaku od 3° do 5° ide razdioba od 2 do 2 minute. Tu se može postaviti, odnosno očitati na 0,5′ tačno.

Napokon, u posljednjem razmaku od 5° do 5°44′ ima skala crtice samo za svakih 5′. Tu se postavlja, odnosno očitava svaka minuta.

20.2.2. Određivanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija na računalima sa skalama smještenim na stražnjoj strani jezika i određivanje kuta iz zadane vrijednosti funkcije

20.2.2.1. *Određivanje vrijednosti sinusa i tangensa kutova od* 0 *do* 34′

Rekli smo već da se za kutove od 0 do 34′ uzima da je

$$\sin\alpha \doteq \arc\alpha \doteq \operatorname{tg}\alpha \quad (\doteq \text{čitaj »približno jednako«})$$

te se određivanje vrijednosti sinusa i tangensa gore navedenih kutova svodi na već nama poznato računanje arc α, tj. na računanje lučne mjere kuta α (vidi 19).

Prema tome sinus, odnosno tangens ovih kutova odredimo na taj način da *kut* α, *čiji sinus ili tangens tražimo, pretvorima ili samo u minute ili samo u sekunde, pa taj broj podijelimo na skalama* C *i* D *računala, u prvom slučaju sa* 3438, *a u drugom sa* 206265, *pamteći kod određivanja položaja decimalnog zareza u rezultatu da* ρ' *ima* $(+4)$ *mjesta, a* ρ'' $(+6)$ *mjesta.*

Znamo već da su na *skalama* C *i* D *crte* »3438«, *dotično* »206265« *označene znakovima* ρ' *i* ρ''.

Primjeri:

$$\sin 25'' = \operatorname{tg} 25'' = \arc 25'' = \frac{25''}{\rho''} = 0{,}000121$$

$$\sin 1'13'' = \operatorname{tg} 1'13'' = \arc 1'13'' = \frac{73''}{\rho''} = 0{,}000354$$

$$\sin 7' = \operatorname{tg} 7' = \arc 7' = \frac{7'}{\rho'} = 0{,}00204$$

$$\sin 11'15'' = \operatorname{tg} 11'15'' = \arc 11'15'' = \frac{11',25}{\rho'} = 0{,}00327$$

$$\sin 32'30'' = \operatorname{tg} 32'30'' = \arc 32'30'' = \frac{32',5}{\rho'} = 0{,}00945$$

$$\sin 23'56'' = \operatorname{tg} 23'56'' = \arc 23'56'' = \frac{1436''}{\rho''} = 0{,}00696$$

Obrnuti zadatak, tj. određivanje kuta ako je zadana vrijednost sinusa ili tangensa, riješit ćemo u slučaju kad je ta vrijednost manja od 0,01 (tj. ima iza 0, dvije ili više nula) tako da zadanu vrijednost sinusa ili tangensa množimo sa ρ, i to sa ρ' ili ρ'', prema tome hoćemo li da traženi kut bude izražen u minutama ili u sekundama.

Primjeri:

$\sin\alpha$ ili $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}00727$; $\alpha' = 0{,}00727 \cdot \rho' = 25'$
$\sin\alpha$ ili $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}000247$; $\alpha'' = 0{,}000247 \cdot \rho'' = 51''$
$\sin\alpha$ ili $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}001833$; $\alpha'' = 0{,}001833 \cdot \rho'' = 378'' = 6'18''$

20.2.2.2. *Određivanje vrijednosti sinusa i tangensa kutova od* 34′ *do* 5°44′

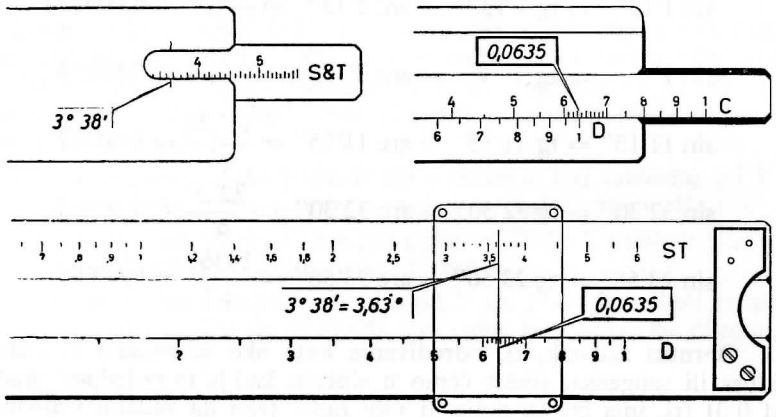
Ako računalo ima tri trigonometrijske skale, tj. ako ima u sredini stražnje strane jezika skalu S & T, određivat ćemo vrijednost sinusa ili tangensa kutova od 34′ do 5°44′ pomoću te skale i donje skale C prednje strane jezika.

Primjer:

sin 3°38′ ili tg 3°38′ = 0,0635 (sl. 38).

Okrenuvši računalo oko njegove uzdužne osi za 180° tako, da pred nama bude njegova stražnja strana, stavimo kut 3°38′ skale S & T iznad donje indeksne crte koja se nalazi u desnom isjeku štapa, a okrenuvši računalo natrag, čitamo na donjoj skali C jezika iznad konačne crte donje skale D štapa traženu vrijednost 0,0635.

Tražena vrijednost imat će uvijek jednu nulu desno od decimalnog zareza, tj. broj mjesta bit će »—1«, jer vrijednosti sinusa, odnosno tangensa kutova od 34′ do 5°44′ leže između 0,01 i 0,1, kako se to vidi iz prije navedenih tabela.



Sl. 38.

Isti primjer prikazan je u sl. 38 na računalu novijeg sistema. Skala je označena sa ST.

Primjeri:

sin 44′30″ ili tg 44′30″ = 0,01295
sin 1°3′ ili tg 1°3′ = 0,01832
sin 2°48′ ili tg 2°48′ = 0,0489
sin 4°14′ ili tg 4°14′ = 0,0738

Obrnuti zadatak, tj. određivanje kuta ako zadana vrijednost sinusa ili tangensa leži između 0,01 i 0,1 (tj. ako ima iza 0, jednu nulu) rješava se tako da se ta vrijednost, uzeta na donjoj skali C jezika, stavi iznad konačne crte donje skale D štapa, pa se traženi kut očita na skali S & T iznad donje indeksne crte desnog isjeka štapa.

Primjeri:

sin α ili tg α = 0,0207; α = 1°11′
sin α ili tg α = 0,0895; α = 5°8′
sin α ili tg α = 0,0593; α = 3°24′

Ako računalo ima dvije trigonometrijske skale, tj. ako skale S & T nema, vrijednosti sinusa odnosno tangensa kutova od 34′ do 5°44′ odrede se pomoću gornje skale S stražnje strane jezika i gornje skale B prednje strane jezika.

Primjer:

sin 3°38′ ili tg 3°38′ = 0,0635

Okrenuvši računalo oko njegove uzdužne osi za 180° tako da pred nama bude njegova stražnja strana, stavimo kut 3°38′ skale S ispod gornje indeksne crte koja se nalazi u desnom isjeku štapa. Okrenemo li sada računalo opet u pređašnji položaj, očitat ćemo ispod konačne crte gornje skale A štapa na gornjoj skali B jezika traženu vrijednost 0,0635.

Obratimo pažnju na to da će tražena vrijednost sinusa, odnosno tangensa imati »—1« mjesto i da će ležati na I-oj logaritamskoj jedinici skale B.

Obrnuti zadatak, tj. određivanje kuta iz zadane vrijednosti sinusa ili tangensa, rješava se obrnutim postupkom na istim skalama računala pri čemu se zadana vrijednost sinusa ili tangensa koja leži između 0,01 i 0,1 uzme na I-oj logaritamskoj jedinici gornje skale B štapa.

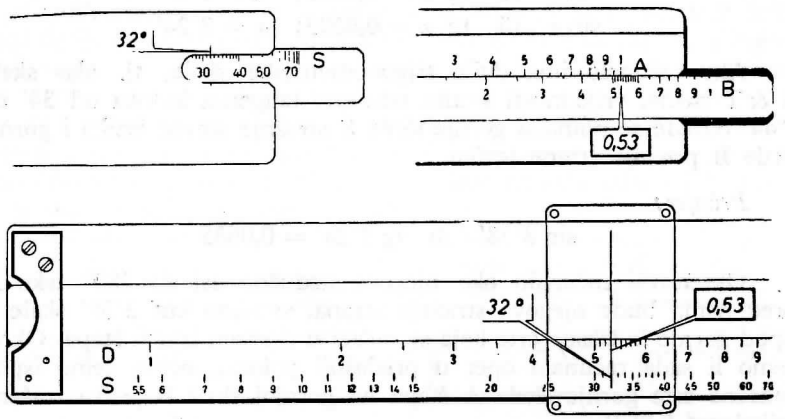
Primjere vidi gore.

20.2.2.3. *Određivanje vrijednosti sinusa kutova od* 5°44′ *do* 90°

Da odredimo vrijednost sinusa kuta čija vrijednost leži između 5°44′ i 90° okrenimo računalo oko uzdužne osi pa stavimo zadani kut, uzet na skali S stražnje strane jezika, ispod gornje indeksne crte desnoga isjeka štapa. Vratimo li sada opet računalo u pređašnji položaj očitat ćemo traženu vrijednost sinusa na računalu s tri trigonometrijske skale na donjoj skali C jezika iznad konačne crte donje skale D štapa, a na računalu s dvije trigonometrijske skale na gornjoj skali B jezika ispod konačne crte gornje skale A štapa.

Budući da za kutove od 5°44′ do 90° sinus prima vrijednosti od 0,1 do 1 bit će broj mjesta vrijednosti sinusa u ovom slučaju uvijek »0«.

Na računalu s dvije trigonometrijske skale ležat će ova vrijednost na II-oj logaritamskoj jedinici gornje skale B jezika.



Sl. 39.

Slika 39 prikazuje određivanje sin 32° = 0,53 na računalu s dvije trigonometrijske skale.

Isti primjer prikazan je u sl. 39 i na računalu novijeg sistema.

Primjeri:

sin 6°36′ = 0,1146	sin 46°15′ = 0,722
sin 10°20′ = 0,1794	sin 63°30′ = 0,895
sin 16°55′ = 0,291	

Obrnuti zadatak, tj. određivanje kuta iz zadane vrijednosti sinusa koja leži između 0,1 i 1 (tj. nema nule iza 0,) rješava se obrnutim postupkom na istim skalama računala. Na računalu s dvije trigonometrijske skale ta se vrijednost uzme na II-oj logaritamskoj jedinici gornje skale B jezika.

20.2.2.4. *Određivanje vrijednosti tangensa kutova od* 5°44′ *do* 45°

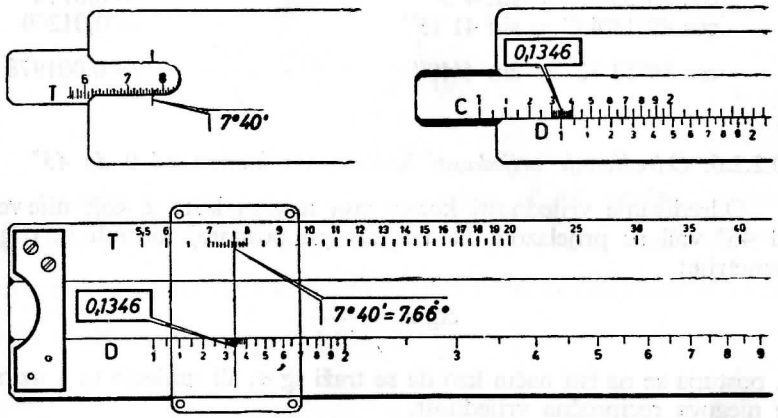
Određivanje vrijednosti tangensa gore navedenih kutova vrši se obično za obje vrste računala na isti način pomoću skale T stražnje strane jezika, koja predočuje funkcijsku skalu funkcije $y = \log \operatorname{tg} x$ za kutove od 5°44′ do 45°, narisanu u jedinici donje skale C jezika.

Na računalu okrenutom svojom stražnjom stranom prema gore uzimamo zadani kut na donjoj skali T stražnje strane jezika, postavimo ga iznad donjega indeksa lijevog isjeka štapa, pa njegovu vrijednost tangensa očitamo, okrenuvši računalo u obični položaj, na donjoj skali C prednje strane jezika iznad početne crte donje skale D štapa.

Broj mjesta u vrijednosti tangensa bit će u ovom slučaju uvijek »0«, jer pri promjeni kuta od 5°43′ do 45° tangens prima vrijednosti od 0,1 do 1.

Primjer:

tg 7°40′ = 0,1346 (sl. 40).



Sl. 40.

Stavimo kut 7°40′ skale T iznad donje indeksne crte lijevog isjeka štapa, pa okrenuvši računalo očitamo na donjoj skali C prednje strane jezika iznad početne crte donje skale D štapa traženu vrijednost tangensa 0,1346.

Istri primjer prikazan je u sl. 40 i na računalu novijeg sistema.

Primjeri:

tg 7°10′ = 0,1257	tg 10°55′ = 0,1928
tg 10°38′ = 0,1878	tg 35°15′ = 0,707

Obrnuti zadatak, tj. određivanje kuta iz zadane vrijednosti tangensa koja leži između 0,1 i 1 (tj. nema nule iza 0,) rješava se na istim skalama računala obrnutim postupkom.

20.2.2.5. *Određivanje vrijednosti kosinusa kutova od 0 do 90°*

Određivanje vrijednosti kosinusa kuta α vrši se prijelazom na sinus komplementarnoga kuta $(90° - \alpha)$, tj. na temelju poznate formule iz trigonometrije:

$$\cos \alpha = \sin (90° - \alpha).$$

Primjeri:

$\cos 19° = \sin (90° - 19°) = \sin 71° = 0{,}946$

$\cos 32°30' = \sin (90° - 32°30') = \sin 57°30' = 0{,}843$

$\cos 75°10' = \sin (90° - 75°10') = \sin 14°50 = 0{,}256$

$\cos 85°55' = \sin 4°5' = 0{,}0712$

$\cos 89°18'45'' = \sin 41'15'' = 0{,}01200$

$\cos 89°53'12'' = \sin 6'48'' = \frac{6{,}8'}{\rho'} = 0{,}001978$

20.2.2.6. *Određivanje vrijednosti kontangensa kutova od 0 do 45°*

Određivanje vrijednosti kotangensa nekoga kuta α koji nije veći od 45° vrši se prijelazom na tangens po poznatoj formuli iz trigonometrije:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

tj. postupa se na isti način kao da se traži tg α, ali umjesto tg α uzima se njegova recipročna vrijednost.

Prema tome ako kut α leži između 34′ i 5°44′ očitat ćemo vrijednost kotangensa na računalu s tri trigonometrijske skale na skali recipročnih vrijednosti R jezika iznad konačne crte donje skale D štapa ili, ako naše računalo nema skale R, na donjoj skali D štapa, ispod početne crte donje skale C jezika.

Na računalu s dvije trigonometrijske skale očitat ćemo vrijednost kontangensa kutova od 34′ do 5°44′ na gornjoj skali A štapa iznad početne crte gornje skale B jezika.

Broj mjesta vrijednosti kotangensa kutova od 34′ do 5°44′ bit će uvijek »+2«.

Primjeri:

$$\operatorname{ctg} 1°30' = \frac{1}{\operatorname{tg} 1°30'} = 38{,}2$$

$$\operatorname{ctg} 3°50' = \frac{1}{\operatorname{tg} 3°50'} = 14{,}92$$

$$\operatorname{ctg} 4°10' = \frac{1}{\operatorname{tg} 4°10'} = 13{,}73$$

Leži li kut između 5°44′ i 45° očitavą se vrijednost kontangensa na obje vrste računala na skali recipročnih vrijednosti R iznad početne crte donje skale D štapa ili, ako skale R nema, na skali D ispod konačne crte donje skale C jezika. Broj mjesta kotangensa bit će u ovom slučaju uvijek »+1«.

Primjeri:

$$\operatorname{ctg} 8°10' = \frac{1}{\operatorname{tg} 8°10'} = 6{,}97$$

$$\operatorname{ctg} 18°50' = 2{,}93$$

$$\operatorname{ctg} 37°15' = 1{,}315$$

Vrijednost kontangensa kuta α manjega od 34′ aproksimirat ćemo kvocijentom $\frac{\rho'}{\alpha'}$, odnosno kvocijentom $\frac{\rho''}{\alpha''}$, prema tome da li je kut α zadan u minutama ili u sekundama, jer se za male kutove α može uzeti da je $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{arc} \alpha} = \frac{1}{\frac{\alpha}{\rho}} = \frac{\rho}{\alpha}$.

Pri određivanju broja mjesta u traženoj vrijednosti kontangensa pamtimo da je $\rho = 3438'$, tj. ima »+4« mjesta, a da $\rho'' = 206265''$ ima »+6« mjesta.

Primjeri:

$$\operatorname{ctg} 5' = \frac{1}{\operatorname{tg} 5'} = \frac{1}{\operatorname{arc} 5'} = \frac{\rho'}{5'} = 688$$

$$\operatorname{ctg} 1' = \frac{\rho'}{1'} = 3438$$

$$\operatorname{ctg} 19'45'' = \frac{\rho'}{19{,}75} = 174{,}1$$

$$\operatorname{ctg} 25'58'' = \frac{\rho''}{1558''} = 132{,}4$$

20.2.2.7. *Određivanje vrijednosti tangensa kutova od 45° do 90°*

Određivanje vrijednosti tangensa nekoga kuta α koji leži između 45° i 90° vrši se prijelazom na kontangens komplementarnog kuta $(90° - \alpha)$, tj. na temelju poznate formule iz trigonometrije:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tcg} (90° - \alpha)$$

Primjeri:

$$\operatorname{tg} 50° = \operatorname{ctg} (90° - 50°) = \operatorname{ctg} 40° = \frac{1}{\operatorname{tg} 40°} = 1{,}192$$

$$\operatorname{tg} 63°20' = \operatorname{ctg} 26°40' = 1{,}991$$
$$\operatorname{tg} 88°36' = \operatorname{ctg} 1°24' = 40{,}9$$
$$\operatorname{tg} 89°31' = \operatorname{ctg} 29' = \frac{\rho'}{29'} = 118{,}5$$

20.2.2.8. *Određivanje vrijednosti kontangensa kutova od 45° do 90°*

Određivanje vrijednosti kontangensa tih kutova svodi se na određivanje vrijednosti tangensa komplementarnoga kuta, tj. vrši se prijelaz po formuli:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} (90° - \alpha)$$

Primjeri:

$$\operatorname{ctg} 48° = \operatorname{tg} (90° - 48°) = \operatorname{tg} 42° = 0{,}900$$
$$\operatorname{ctg} 55°10' = \operatorname{tg} 34°50' = 0{,}696$$
$$\operatorname{ctg} 84°54' = \operatorname{tg} 5°2' = 0{,}0881$$
$$\operatorname{ctg} 89°54' = \operatorname{tg} 6' = \operatorname{arc} 6' = \frac{6'}{\rho'} = 0{,}001745$$

20.2.2.9. *Određivanje vrijednosti goniometrijskih funkcija kutova većih od 90°*

Vrijednosti sinusa, kosinusa, tangensa i kotangensa kutova većih od 90° određuju se po gore navedenim pravilima poslije prijelaza na šiljate kutove.*

Kod toga prijelaza treba držati na pameti da se od sinusa i kosinusa vrši prijelaz na sinus, a od tangensa i kontangensa na kut manji od 45°, da se neposredno mogu primijeniti pripadne skale računala.

* Kako se vrši prijelaz na šiljate kutove vidi npr. kod istog pisca: Repetitorij elementarne matematike, Tehnička knjiga, Zagreb.

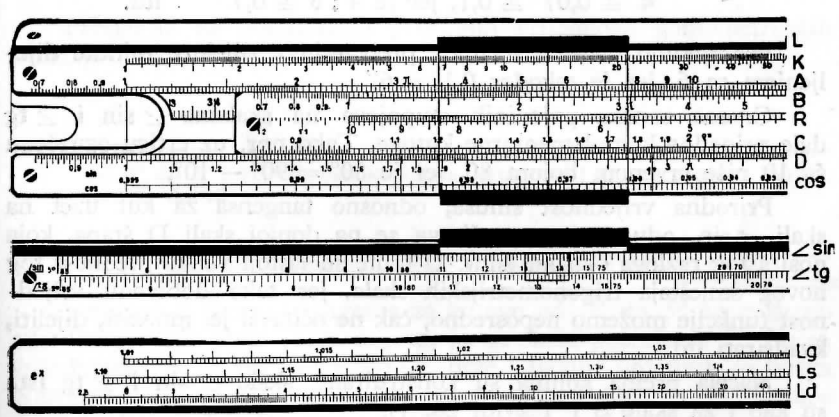
Primjeri:

$$\sin 115°30' = \sin 64°30' = 0{,}903$$
$$\cos 225° = -\sin 45° = -0{,}707$$
$$\operatorname{tg} 301° = -\operatorname{ctg} 31° = -1{,}664$$
$$\operatorname{tg} 325° = -\operatorname{tg} 35° = -0{,}700$$
$$\operatorname{ctg} 115°30' = -\operatorname{tg} 25°30' = -0{,}477$$
$$\operatorname{ctg} 165°30' = -\operatorname{ctg} 14°30' = -3{,}87$$

20.3 Računala sustava »Darmstadt«

20.3.1. Opis trigonometrijskih skala računala sutava »Darmstadt«

Trigonometrijske skale računala sustava »Darmstadt« imaju mnogo zgodniji poređaj i razdiobu nego računala svih ostalih sustava. To su skale »$\angle$ sin« i »$\angle$ tg« koje su smještene na prednjem rubu štapa, skala »cos« odnosno »$1/\sqrt{1 - x^2}$« koja je najdonja skala štapa (vidi sl. 41).



Sl. 41.

Postavljanje i čitanje na trigonometrijskim skalama vrši se pomoću posebne indeksne crte smještene na prednjem rubu okvira kazaljke.

Pogledamo li pažljivo skale $\angle$ sin i $\angle$ tg opazit ćemo da se razdioba prve skale proteže od 5° do 90°, a druge od 5° do 45° i da je provedena *decimalna razdioba svakog pojedinog stupnja*, tj. stupanj nije podi-

jeljen u minute, već u desetine tako da svaki dio vrijedi $0{,}1° = \frac{60'}{10} = 6'$ (samo na početku tih skala provedena je nešto sitnija, a na kraju nešto grublja razdioba). Taj novi način razdiobe stupnja posve je opravdan, jer na računalu obične duljine ne možemo pojedine minute niti postaviti niti očitati, a i praktičan je jer olakšava i ubrzava postavljanje i čitanje kuta, ali traži brzo pretvaranje minuta u dijelove stupnja, ako zadani kut za koji tražimo vrijednost goniometrijskih funkcija sadržava minute.

Kako je $0{,}1° = 6'$, *dijelove stupnja dobit ćemo tako da broj minuta podijelimo* sa 6 na jednu znamenku tačno. Samo kod malih i velikih kutova vršimo tu diobu na dvije znamenke tačno, ukoliko se traži veća tačnost.

Npr.:

$42' = 0{,}7°$, jer je $42 : 6 = 7$
$33' = 0{,}55° \doteq 0{,}6°$, jer je $33 : 6 = 5{,}5$
$4' \doteq 0{,}07° \doteq 0{,}1$, jer je $4 : 6 \doteq 0{,}7$ itd.

Primijetimo da se i sekunde pretvaraju u dijelove minute dijeljenjem sa 6, jer je također $0{,}1' = 6''$.

Crvena oznaka pojedinih stupnjeva na skalama $\angle$ sin i $\angle$ tg daje pripadne komplementarne kutove. Tako npr. uz crticu označenu sa 10 piše crvenom bojom 80, jer je $80° = 90° - 10°$.

Prirodna vrijednost sinusa, odnosno tangensa za kut uzet na skali $\angle$ sin, odnosno $\angle$ tg očitava se na donjoj skali D štapa, koja nosi s tog razloga oznaku »sin«. U tome se sastoji velika prednost tog novog smještaja trigonometrijskih skala, jer tako dobivenu vrijednost funkcije možemo neposredno, čak ne očitavši je, množiti, dijeliti, kvadrirati itd.

Načela prema kojima su konstruirane skale $\angle$ sin i $\angle$ tg ista su kao i za skale S i T (vidi 20, 1).

Treća trigonometrijska skala »cos« daje vrijednost funkcije kosinusa za kutove postavljene na skali $\angle$ sin. Uočimo li veliko značenje funkcije kosinusa u tehničkim računima shvatit ćemo i tu prednost računala sastava »Darmstadt«.

Čitanje i postavljanje na skali cos vrši se zdesna nalijevo i stoga je ta skala, kao i skala recipročnih vrijednosti R, nanesena na novijim računalima prema našim nastojanjima crvenom bojom. Na nekim računalima ta je skala označena sa $\sqrt{1 - x^2}$, gdje je x vrijednost

sinusa očitana na skali D, jer je prema poznatoj goniometrijskoj formuli $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$, pri čemu je x deset puta manja vrijednost od one koja je na skali D označena. Na primjer, ako je hipotenuza pravokutnog trokuta 1, a jedna kateta 0,6, drugu katetu dobit ćemo tako da crtu kazaljke postavimo na 6 skale D. Tada će ispod crte kazaljke ležati na skali cos vrijednost druge katete, to jest 0,8 jer je $0{,}8 = \sqrt{1 - 0{,}6^2}$. Na isti način možemo pomoću skala D i cos računati ordinate jedinične kružnice za x od 0,1 do 1, jer iz jednadžbe kružnice $x^2 + y^2 = 1$ slijedi da je $y = \sqrt{1 - x^2}$. Možemo naravno postupati i obratno: x uzimati na skali cos, a y očitavati na skali D. Prema tome ako crtu kazaljke postavimo na neku crtu vrijednosti x skale cos, ležat će ispod crte kazaljke na skali D vrijednost $\sqrt{1 - x^2}$, a na kvadratnoj skali A vrijednost $1 - x^2$. Npr. za $x = 0{,}935$ uzet na skali cos dobivamo na skali D 0,355, a na skali A 0,126, jer je $0{,}355 = \sqrt{1 - 0{,}935^2}$, a $0{,}126 = 1 - 0{,}935^2$.

Prelazimo na određivanje prirodnih vrijednosti goniometrijskih funkcija na opisanim skalama.

20.3.2. Određivanje vrijednosti sinusa, tangensa i kotangensa za kutove od 0° do 5° i vrijednosti kosinusa, tangensa i kotangensa za kutove od 85° do 90°

20.3.2.1. *Određivanje vrijednosti sinusa i tangensa za kutove od 0° do 5°*

Vrijednosti sinusa i tangensa za kutove od 0° do 5° ne možemo odrediti pomoću skala $\angle$ sin i $\angle$ tg, jer te skale počinju sa 5° Da se vrijednosti odrede što jednostavnije, brže i tačnije umetnula je tvrtka Nestler prema našim nastojanjima i uputama na donjoj skali D štapa svojih računala br. 21 sustava »Darmstadt« posebne crvene marke, tj. crtice s oznakom 1°, 1′ i 1″ pa ta računala označila sa br. 21 Z (Zagreb) i br. 21 ZH (Zagreb Hrvatska). To su najsavršenija računala koja uopće postoje (vidi sliku 41).

Marka 1° znači: $\sin 1° \doteq \operatorname{tg} 1° \doteq \operatorname{arc} 1° = 0{,}01745$
Marka 1′ znači: $\sin 1' \doteq \operatorname{tg} 1' \doteq \operatorname{arc} 1' = 0{,}000291$
Marka 1″ znači: $\sin 1'' \doteq \operatorname{tg} 1'' \doteq \operatorname{arc} 1'' = 0{,}00000485$

Te vrijednosti ne treba da pamtimo, ali da možemo mehanički određivati položaj decimalnog zareza u dobivenim vrijednostima sinusa i tangensa držat ćemo na pameti samo njihov broj mjesta:

marka 1° ima — 1 mjesto
marka 1′ ima — 3 mjesta
marka 1″ ima — 5 mjesta.

Određivanje vrijednosti sinusa i tangesa za kutove od 0° do 5° vrši se tako da se na donjim skalama D i C računala jednostavno množi marka s kutom i to marka 1° s kutom koji je izražen samo u stupnjevima, marka 1′ s kutom koji je izražen samo u minutama, marka 1″ s kutom koji je izražen samo u sekundama. Položaj decimalnog zareza određuje se prema pravilima za množenje.

Postupa se dakle ovako:

$$\sin \alpha^\circ \doteq \operatorname{tg} \alpha^\circ = \operatorname{arc} \alpha^\circ = \text{marka } 1^\circ \cdot \alpha^\circ$$
$$\sin \alpha' \doteq \operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{arc} \alpha' = \text{marka } 1' \cdot \alpha'$$
$$\sin \alpha'' \doteq \operatorname{tg} \alpha'' = \operatorname{arc} \alpha'' = \text{marka } 1'' \cdot \alpha''$$

Primjeri:

$\sin 2^\circ = \operatorname{tg} 2^\circ = \text{marka } 1^\circ \cdot 2 = 0{,}0349$
Broj mjesta: $(-1) + 1 + \text{dodatak } (-1) = -1$
$\sin 1°40' = \sin 1{,}667^\circ = \text{marka } 1^\circ \cdot 1{,}67 = 0{,}0291$
$\operatorname{tg} 3°13' = \operatorname{tg} 3{,}22^\circ = \text{marka } 1^\circ \cdot 3{,}22 = 0{,}0562$
$\sin 11'15'' = \sin 11{,}25' = \text{marka } 1' \cdot 11{,}25 = 0{,}00328$
Broj mjesta: $(-3) + 2 + \text{dodatak } (-1) = -2$
$\operatorname{tg} 1'13'' = \operatorname{tg} 1{,}217' = \text{marka } 1' \cdot 1{,}217 = 0{,}000354$
$\sin 25'' = \text{marka } 1'' \cdot 25 = 0{,}0001212$
Broj mjesta: $(-5) + 2 = -3$
$\operatorname{tg} 12'' = \text{marka } 1'' \cdot 12 = 0{,}0000582.$

20.3.2.2. *Određivanje vrijednosti kotangensa za kutove od 0° do 5°*

Na isti način, uz prijelaz na recipročnu vrijednost, određuju se vrijednosti kotangensa za kutove od 0° do 5°, jer je

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

Postupak: nakon množenja marke s kutom jezik se postavi u osnovni položaj, tj. takav da se podudaraju pripadne crtice skala jezika i štapa, a traženi se kut očita ispod crte kazaljke na skali recipročnih vrijednosti R.

Primjeri:

$$\operatorname{ctg} 2^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 2^\circ} = \frac{1}{\text{marka } 1^\circ \cdot 2} = 28{,}6$$

Broj mjesta: $-[-1 + 1 + \text{dodatak } (-1)] + 1 = +2$

$$\operatorname{ctg} 57' = \frac{1}{\operatorname{tg} 57'} = \frac{1}{\text{marka } 1' \cdot 57} = 60{,}3$$

Broj mjesta: $-(-3 + 2) + 1 = +2$

$$\operatorname{ctg} 1°16' = \operatorname{ctg} 1{,}27^\circ = 45{,}2$$

20.3.2.3. *Određivanje vrijednosti kosinusa i kotangensa za kutove od 85° do 90°*

Na isti način uz prijelaz na komplementne kutove određuju se vrijednosti kosinusa i kotangensa za kutove od 85° do 90°, jer je

$$\cos \alpha = \sin (90^\circ - \alpha)$$
$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} (90^\circ - \alpha),$$

a za α od 85° do 90° ima $(90^\circ - \alpha)$ vrijednost, koja leži između 5° i 0.

Primjeri:

$\cos 87°10' = \sin 2°50' = \sin 2{,}83^\circ = 0{,}0494$
$\operatorname{ctg} 85°30' = \operatorname{ctg} 85{,}5^\circ = \operatorname{tg} 4{,}5 = 0{,}0785$
$\cos 89°28' = \sin 32' = 0{,}00931$

20.3.2.4. *Određivanje vrijednosti tangensa kuta od 85° do 90°*

Na sličan se način određuju i vrijednosti $\operatorname{tg} \alpha$ za α od 85° do 90°. Pošto je $\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg} (90^\circ - \alpha)}$ računa se najprije pomoću maraka 1°, 1′ ili 1″ vrijednost tangensa komplementnog kuta, pa se njena recipročna vrijednost očita na skali R, koja se nakon množenja marke s kutom postavi u osnovni položaj tj. takav, da se podudaraju pripadne crtice jezika i štapa.

Primjeri:

$$\operatorname{tg} 86^\circ = \operatorname{ctg} 4^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 4^\circ} = 14{,}3$$

Broj mjesta: $-[-1 + 1 + \text{dodatak } (-1)] + 1 = 2$

$$\operatorname{tg} 89°4' = \frac{1}{\operatorname{tg} 56'} = 61{,}4$$

Broj mjesta: $-(-3+2)+1=2$

$$\operatorname{tg} 87°51' = \frac{1}{\operatorname{tg} 2°9'} = \frac{1}{\operatorname{tg} 2{,}15} = 26{,}6$$

Broj mjesta: $-[-1+1+\text{dodatak } (-1)]+1=+2$

20.3.3. Određivanje vrijednosti sinusa za kutove od 5° do 90° i vrijednosti kosinusa od 0 do 85°

Vrijednost sinusa određuje se tako da se indeksna crta prednjeg ruba kazaljke postavi na zadani kut uzet na skali ∠ sin, pa se ispod crte kazaljke očita na donjoj skali D štapa (sin) tražena vrijednost sinusa. Ta vrijednost ima 0 mjesta, osim u slučaju kad se očitava na produženju skale D, tj. za kutove od 5° do 5,74° = 5°44'. Tada vrijednost sinusa ima jedno negativno mjesto:

sin 30° = 0,500
sin 6°35' = sin 6,59° = 0,1146
sin 16°54' = sin 16,9° = 0,291
sin 58°40' = sin 58,7° = 0,854
sin 5°20' = sin 5,33° = 0,0930
sin 5°6' = sin 5,1° = 0,0889

Na isti se način određuju vrijednosti kosinusa koje se očitavaju na najdonjoj skali »cos« $\left(\sqrt{1-x^2}\right)$ štapa (vidi sl. 41). Položaj decimalnog zareza naznačen je na skali.

Pazi: čitanja (i postavljanja) na skali cos *vrše se zdesna nalijevo!*

Primjeri:

cos 20° = 0,940
cos 5°55' = cos 5,92° = 0,9947
cos 24°10' = cos 24,2° = 0,9124
cos 52°20' = cos 52,3° = 0,611

Već letimičan pogled na skalu ∠ sin pokazuje da su posljednji razmaci te skale toliko sitni da nije moguće na tim razmacima zadani kut tačno postaviti, pa dakle i tačno odrediti pripadnu vrijednost sinusa ili kosinusa. Ta se mana međutim dade lako ukloniti prijelazom na komplementni kut i kofunkciju:

$$\sin\alpha = \cos(90°-\alpha); \quad \cos\alpha = \sin(90°-\alpha)$$

Taj se postupak preporučuje za kutove veće od 60°. Računanje komplementnih kutova otpada, jer kako već znamo ti su kutovi naneseni na skali ∠ sin crvenom bojom, a postavljaju se idući zdesna nalijevo. Dakle: *za kutove veće od* 60° *uzimat ćemo na skali* ∠ sin *crveno označene komplementne kutove, dok ćemo vrijednost sinusa čitati na skali* cos, *a vrijednost kosinusa na skali* sin.

Primjeri:

sin 80° = cos 10° = 0,9848
cos 80° = sin 10° = 0,1736
sin 72°54' = sin 72,9° = 0,9558
cos 83°17' = cos 83,28° = 0,1170
sin 66°5' = sin 66,1° = 0,9142
cos 78°45' = cos 78,75° = 0,1951

Kako se skala cos proteže samo do 0,995, kojoj vrijednosti kosinusa odgovara kut 5,74° = 5°44', a posljednji razmaci na skali ∠ sin toliko su sitni da ne dopuštaju čak ni približno očitanje kuta, uzimat ćemo da je $\sin\alpha \doteq 1$ za α od 84°16' do 90° i $\cos\alpha \doteq 1$ za α od 0 do 5°44'.

Primjeri:

sin 88°44' ≐ 1
cos 2°53' ≐ 1

20.3.4. Određivanje vrijednosti tangensa i kotangensa za kutove od 5° do 85°

Vrijednosti tangensa za kutove od 5° *do* 45° *određuju se tako da se indeksna crta prednjeg ruba kazaljke postavi na zadani kut uzet na skali* ∠ tg, *a tražena se vrijednost tangensa očita na donjoj skali* D *štapa* (sin). Vrijednost tangensa ima uvijek 0 mjesta, samo vrijednost očitana na produženju skale D (sin) ima broj mjesta »—1«.

Primjeri:

tg 6° = 0,1051
tg 7°25' = tg 7,42° = 0,1302
tg 13°57' = tg 13,95° = 0,248
tg 42°3' = 0,910
tg 5°16' = tg 5,27° = 0,0922
tg 5°8' = tg 5,13° = 0,0898

Kako je $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, vrijednosti ctg α za α od 5° do 45° odre-

đuje se na slični način, tj. kut α postavi se na istoj skali $\angle$ tg, ali se vrijednost ctg α očita na skali recipročnih vrijednosti R, koja se prethodno postavi u osnovni položaj. Broj mjesta je uvijek »+ 1« (jer je $0 + 1 = +1$), a na produženju skale R »+ 2« (jer je $-(-1) + +1 = +2$).

Primjeri:

ctg 7° = 8,14
ctg 12°9′ = ctg 12,15° = 4,64
ctg 23°48′ = ctg 23,8° = 2,27
ctg 43°52′ = ctg 43,9° = 1,040
ctg 5°7′ = ctg 5,12° = 11,17
ctg 5°30′ = ctg 5,5° = 10,39

Vrijednosti tg α i ctg α za α od 45° do 85° određuju se prijelazom na komplementni kut i kofunkciju, tj. računaju se prema

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(90° - \alpha) \quad \text{i} \quad \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}(90° - \alpha),$$

to znači s obzirom na računalo: crvena oznaka na skali $\angle$ tg i očitavanje tg α na skali R, a ctg α na skali D (sin). Sada vrijednosti tangensa imaju broj mjesta »+ 1« odnosno »+ 2«, a vrijednosti kontangensa »0« odnosno »−1«.

Primjeri:

tg 50° = ctg 40° = 1,192
tg 68°25′ = tg 68,4° = 2,53
tg 74°16′ = tg 74,27° = 3,55
tg 83°35′ = tg 83,58° = 8,89
tg 84°42′ = tg 84,7° = 10,78
tg 84°58′ = tg 84,97° = 11,35
ctg 60° = tg 30° = 0,577
ctg 78°21′ = ctg 78,35° = 0,206
ctg 84°8′ = ctg 84,13° = 0,1028
ctg 84°50′ = ctg 84,83° = 0,0904

20.3.5. Primjedbe i pregledne tablice za računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija

Da se početnik što brže snađe u navedenim pravilima za određivanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija i da postigne što veću brzinu i sigurnost u računanju treba da uvijek drži na pameti:

1. da je sinus malih kutova malen, a za kutove koji su blizu 90° gotovo 1, jer sin 0 = 0 a sin 90° = 1.

2. da je kosinus malih kutova gotovo 1, ali je vrlo malen za kutove koji su blizu 90°, jer je cos 0 = 1, a cos 90° = 0.

3. da je tangens kutova od 0 do 45° manji od 1, a kotangens veći od 1 i da je tangens kutova između 45° i 90° veći od 1, a kotangens manji od 1, jer je

$$\operatorname{tg}0 = 0, \quad \operatorname{tg}45° = 1, \quad \operatorname{tg}90° = \infty$$
$$\operatorname{ctg}0 = \infty, \quad \operatorname{ctg}45° = 1, \quad \operatorname{ctg}90° = 0$$

4. da se vrijednosti tangensa i kontangensa koje su manje od 1 očitavaju na donjoj skali D štapa (sin), a vrijednosti veće od 1 na skali recipročnih vrijednosti R

5. da prijelaz na komplementni kut s obzirom na računalo znači:

a) crvena oznaka na skalama $\angle$ sin i $\angle$ tg, koja ide zdesna nalijevo,

b) očitava se:

vrijednost sinusa	na skali cos
vrijednost kosinusa	na skali D (sin)
vrijednost tangensa	na skali R
vrijednost kotangensa	na skali D.

U tablicama koje slijede pregledno su poredana sva navedena pravila za određivanje vrijednosti goniometrijskih funkcija.

SINUS

Kut α	Postavljanje	Očitanje	Broj mjesta
0° — 5°	Množenje marke s kutom na skalama C i D, tj. marka × kut	na skali D (sin) štapa	marka 1°:-1 „ 1′:-3 „ 1″:-5
5° — 60°	na skali $\angle$ sin, crna oznaka kutova	na skali D (sin)	»0« (na produženju skale D »—1«)
60° — 84°16′	na skali $\angle$ sin, crvena oznaka kutova	na skali cos	naznačen na skali
84°16′ — —90°	uzima se da je sin $\alpha \doteq 1$		

KOSINUS			
0—5°44′	uzima se da je $\cos \alpha \doteq 1$		
5°44′—60°	na skali ∠ sin, crna oznaka kutova	na skali cos	naznačen na skali
60°—85°	na skali ∠ sin, crvena oznaka kutova	na skali D (sin)	»0« na (produženju skale D »— 1«)
85°—90°	marka × komplementni kut	na skali D (sin) štapa	»— 1« i manje

TANGENS			
Kut α	Postavljanje	Očitanje	Broj mjesta
0—5°	množenje marke kutom na skalama C i D, tj. marka × kut	na skali D (sin) štapa	marka 1°: -1 marka 1′ : -3 marka 1″: -5
5°—45°	na skali ∠ tg, crna oznaka kutova	na skali D (sin)	»0« (na produženju skale D »— 1«)
45°—85°	na skali ∠ tg, crvena oznaka kutova	na skali R u osnovnom položaju	»+ 1« (na produženju skale R »+ 2«)
85°—90°	$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \frac{1}{\operatorname{tg}(90° - \alpha)} = \frac{1}{\text{marka} \times \text{kompl. kut}}$	na skali R u osnovnom položaju	»+ 2« i više

KOTANGENS			
Kut α	Postavljanje	Očitanje	Broj mjesta
0—5°	$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\text{marka} \times \text{kut}}$	na skali R u osnovnom položaju	»+ 2« i više
5°—45°	na skali ∠ tg, crna oznaka kutova	na skali R u osnovnom položaju	»+ 1« (na produženju skale R »+ 2«)
45°—85°	na skali ∠ tg, crvena oznaka kutova	na skali D (sin)	»0« (na produženju skale D »— 1«)
85°—90°	marka × kompl. kut	na skali D (sin)	»— 1« i manje

20.3.6. Određivanje vrijednosti goniometrijskih funkcija kutova većih od 90°

Najprije se vrši prijelaz na šiljat kut, a nakon toga se primjenjuju gore navedena pravila. Da taj prijelaz ne vršimo dvaput treba izbjegavati prijelaz na šiljate kutove veće od 85°, jer vrijednosti goniometrijskih funkcija (osim sinusa) računamo za te kutove pomoću maraka koje množimo s kutovima manjim od 5°.

Primjeri:

$$\sin 216°24' = -\sin 36{,}4° = -0{,}593$$
$$\cos 345°44' = \sin 75{,}72° = 0{,}9692$$
$$\operatorname{tg} 101°15' = -\operatorname{ctg} 11{,}25° = -5{,}03$$
$$\operatorname{ctg} 261°33' = \operatorname{ctg} 81{,}55° = 0{,}1486$$
$$\operatorname{ctg} 267°33' = \operatorname{tg} 2°27' = \operatorname{tg} 2{,}45° = 0{,}0427$$
$$\sin 267°33' = -\sin 87{,}55° = -1$$
$$\cos 267°33' = -\sin 2°27' = -\sin 2{,}45° = -0{,}0427$$
$$\operatorname{tg} 267°33' = -\operatorname{ctg} 2°27' = -\operatorname{ctg} 2{,}45° = -2{,}34$$

20.3.7. Određivanje kuta iz zadane vrijednosti goniometrijske funkcije

20.3.7.1. *Zadana vrijednost* sin, tg i ctg *manja od* 1, *ali veća od* 0,087

To određivanje vrši se obratnim postupkom.

Zadana vrijednost sinusa, tangensa i kotangensa koja je manja od 1 ali veća od 0,087 postavi se na donjoj skali D štapa (sin), a pripadni kut se očita:

za sinus na skali ∠ sin
za tangens na skali ∠ tg pomoću crne oznake kutova
za kotangens na skali ∠ tg pomoću crvene oznake kutova,

pri čemu se vrijednosti koje imaju jednu nulu iza decimalnog zareza postavljaju na produženju skale D.

20.3.7.2. *Zadana vrijednost* kosinusa *veća od* 0,087

Vrijednosti kosinusa koje su veće od 0,087 postave se na skali cos, a traženi kut se očita na skali ∠ sin.

Zbog veće tačnosti preporučuje se vrijednosti sinusa veće od 0,85 i vrijednosti kosinusa manje od 0,5 uzimati: prve na skali cos, a druge na skali D (sin). U tom slučaju se očitava na skali ∠ sin komplementni kut, tj. crvena oznaka kuta. Za vrijednosti sinusa i kosinusa veće od 0,995 uzima se da je kut $\alpha = 90°$, odnosno $\alpha = 0$.

Primjeri:

$\sin \alpha = 0{,}1736$	$\alpha = 10°$
$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}439$	$\alpha = 23{,}7° = 23°42'$
$\operatorname{ctg} \alpha = 0{,}566$	$\alpha = 60{,}5° = 60°30'$
$\sin \alpha = 0{,}0970$	$\alpha = 5{,}57° = 5°34'$
$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}0948$	$\alpha = 5{,}42° = 5°25'$
$\operatorname{ctg} \alpha = 0{,}0892$	$\alpha = 84{,}9° = 84°54'$
$\cos \alpha = 0{,}9935$	$\alpha = 6{,}54° = 6°32'$
$\cos \alpha = 0{,}783$	$\alpha = 38{,}5° = 38°30'$
$\sin \alpha = 0{,}9861$	$\alpha = 80{,}43° = 80°26'$
$\cos \alpha = 0{,}252$	$\alpha = 75{,}4° = 75°24'$

20.3.7.3. *Zadana vrijednost goniometrijske funkcije manja od* 0,087

Ako je zadana vrijednost goniometrijske funkcije manja od 0,087 pripadni se kut određuje tako da se marka 1° ili 1′ ili 1″ podijeli zadanom vrijednošću funkcije, a kut se očita iznad rezultata dijeljenja na skali

recipročnih vrijednosti R, koja se nakon izvršenog dijeljenja (neposredno pred čitanje) postavi u osnovni položaj jer iz $\sin \alpha = \text{marka } 1° \cdot \alpha°$ slijedi:

$$\alpha° = \frac{\sin \alpha°}{\text{marka } 1°} = \frac{1}{\dfrac{\text{marka } 1°}{\sin \alpha°}}$$

Slične izraze imamo za α' i α'' i to za sve funkcije. Za sinus i tangens dobiva se na taj način traženi kut izražen u stupnjevima, minutama ili sekundama već prema marki kojom se računalo, a za kosinus i kotangens komplementni kut.

Primjeri:

$$\sin \alpha = 0{,}0523 \qquad \alpha° = \frac{1}{\dfrac{\text{marka } 1°}{0{,}0523}} = \underline{3°}$$

Broj mjesta: $-[-1-(-1)]+1 = 1$

$$\cos \alpha = 0{,}0157$$

$$(90 - \alpha°) = \frac{1}{\dfrac{\text{marka } 1°}{0{,}0157}} = 0{,}9° = 54'$$

Broj mjesta: $-[-1-(-1) + \text{dodatak } (+1)]+1 = 2$

$$\underline{\alpha = 89°6'}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = 0{,}00349 \qquad \alpha' = \frac{1}{\dfrac{\text{marka } 1'}{0{,}00349}} = \underline{12'}$$

Broj mjesta: $-[-3-(-2)]+1 = +2$

$$\operatorname{ctg} \alpha = 0{,}000204$$

$$(90° - \alpha°) = \frac{1}{\dfrac{\text{marka } 1''}{0{,}000204}} = 42''$$

Broj mjesta: $-[-5-(-3) + \text{dodatak } (+1)]+1 = +2$

$$\underline{\alpha = 89°59'18''.}$$

20.3.7.4. *Zadana vrijednost* tangensa *i* kotangensa *veća od* 1

Zadana vrijednost tangensa ili kotangensa koja je veća od 1, ali manja od 11,43, uzima se na skali recipročnih vrijednosti R koja je prethodno postavljena u osnovni položaj, pa se kut očita na skali ∠ tg i to za tangens pomoću crvene, a za kotangens pomoću crne oznake kutova, pri čemu se vrijednosti veće od 10 uzimaju na lijevom produženju skale R. Ako je zadana vrijednost tangensa ili kotangensa veća od 11,43, postupa se tako da se marka 1°, 1′ ili 1″ pomnoži sa zadanom vrijednošću funkcije, a kut se očita na skali recipročnih vrijednosti R koja se nakon množenja postavi u osnovni položaj, pri čemu se za tangens uzme komplement izračunatog kuta.

Primjeri:

$\operatorname{tg}\alpha = 1{,}732$	$\alpha = 60°$
$\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}192$	$\alpha = 40°$
$\operatorname{tg}\alpha = 3{,}54$	$\alpha = 74{,}22° = 74°13'$
$\operatorname{ctg}\alpha = 8{,}03$	$\alpha = 7{,}1° = 7°6'$
$\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}078$	$\alpha = 47'15° = 47°9'$
$\operatorname{tg}\alpha = 10{,}78$	$\alpha = 84{,}7° = 84°42'$
$\operatorname{ctg}\alpha = 11{,}20$	$\alpha = 5{,}1° = 5°6'$
$\operatorname{ctg}\alpha = 1{,}120$	$\alpha = 41{,}75° = 41°45'$
$\operatorname{tg}\alpha = 14{,}3$	

$$(90° - \alpha) = \frac{1}{\text{marka } 1° \cdot 14{,}3} = 4°$$

Broj mjesta: $-[-1+2+\text{dodatak } (-1)]+1 = +1$

$$\underline{\alpha = 86°}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = 35{,}8 \qquad \alpha = \frac{1}{\text{marka } 1° \cdot 35{,}8} = 1{,}6° = \underline{1°36'}$$

Primjedba: Svakoj zadanoj vrijednosti goniometrijske funkcije odgovaraju uvijek dva kuta. U navedenim primjerima taj drugi kut nije izračunat.*

* Potanko o tome vidi npr. kod istog pisca: Repetitorij elementarne matematike, Tehnička knjiga, Zagreb.

21. ODREĐIVANJE POTENCIJE BROJA e, PRIRODNIH LOGARITAMA I OPĆENITE POTENCIJE

21.1. Logaritamska skala logaritama (log-log- skala)

21.1.1. Načelo log-log-skale

Pretpostavimo da imamo izračunati vrijednost potencije $y = b^s$. Uzmimo prirodni logaritam toga izraza, tj. logaritmirajmo tu jednadžbu po bazi $e = 2{,}71828\ldots$:

$$\ln y = s \cdot \ln b$$

Tu je »ln« simbol za prirodne (naturalne) logaritme.

Da možemo produkt $s \cdot \ln b$ izračunati na skalama C i D računala logaritmirajmo dobivenu jednakost po bazi 10:

$$\log(\ln y) = \log s + \log(\ln b).$$

Na taj smo način došli do potrebe da u naše računalo uvrstimo još jednu skalu: logaritamsku skalu logaritama ili kraće log-log-skalu, tj. funkciju skalu funkcijska $z = \log(\ln y)$.

Znamo da su obične skale logaritamskog računala, npr. donja skala D štapa, funkcijske skale funkcije $z = \log x$, gdje je x numerus naznačen na skali. Iz usporedbe jednadžbi:

$$z = \log(\ln y) \quad \text{i} \quad z = \log x$$

slijedi da je $\ln y = x$

a iz te jednadžbe po definiciji logaritma (logaritam je eksponent kojim treba potencirati bazu da se dobije zadani broj) slijedi dalje da je

$$e^x = y$$

To znači: pridodamo li log-log-skalu skali D štapa odgovarat će crti x skale D vrijednosti e^x na log-log-skali.

Smatramo li npr. da pojedine crte skale D imaju vrijednosti koje su na njima označene, tj. 1, 2, 3, 4....., 10, odgovarat će tim crtama crte log-log-skale s vrijednostima: $e^1 = e = 2{,}718$; $e^2 = 7{,}389$; $e^3 = 20{,}086$,....., $e^9 = 8103$, $e^{10} = 22026$, a uzmemo li da crtice skale D imaju deset puta manju vrijednost od one koja je na njima napisana, tj. 0,1, 0,2....., 1, imat će pripadne crte log-log-skale vrijednosti $e^{0{,}1} =$

$= 1{,}105$, $e^{0{,}2} = 1{,}221,\ldots$ $e^1 = 2{,}718$ konačno sto puta manjim vrijednostima crta skale D odgovarat će crte log-log-skale $e^{0{,}01} = 1{,}010$, $e^{0{,}02} = 1{,}020,\ldots$, $e^{0{,}1} = 1{,}105$.

Iz navedenog vidimo:

1. da vrijednostima x skale D odgovaraju vrijednosti e^x na log-log-skali,

2. da log-log-skalu ne možemo pridodati skali D na način kako smo to napravili npr. za kvadratnu ili kubnu skalu ($2^2 = 4$, $0{,}2^2 = 0{,}04$, $0{,}02^2 = 0{,}0004$ itd., ali $e^2 = 7{,}389$, $e^{0{,}2} = 1{,}221$, $e^{0{,}02} = 1{,}020$ itd.). Drugim riječima skali D odgovara više dijelova log-log-skale u zavisnosti od toga koje značenje dajemo crtama donje skale D štapa,

3. da je područje brojeva log-log-skale ograničeno prema gore i dolje i da zavisi od broja dijelova log-log-skale koji su konstruirani prema vrijednostima danim crtama skale D,

4. da je tačnost log-log-skale to manja što veće značenje dajemo crtama skale D štapa,

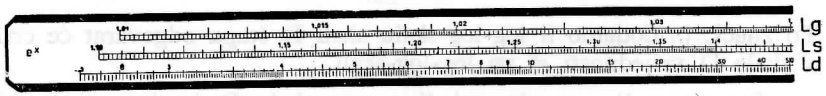
5. da su vrijednosti crta log-log-skale uvijek veće od 1 i veće od pripadnih vrijednosti crta skale D štapa.

Sad kada smo upoznali načelo log-log-skale promotrimo tu skalu na pojedinim sustavima računala.

21.1.2. Opis log-log-skala

21.1.2.1. *Log-log-skale računala sustava* »Darmstadt«

Log-log-skala računala sustava »Darmstadt« (vidi sl. 41 i 42) smještena je na stražnjoj strani jezika, a sastoji se od tri dijela: gornjega Lg, srednjeg Ls i donjeg Ld.



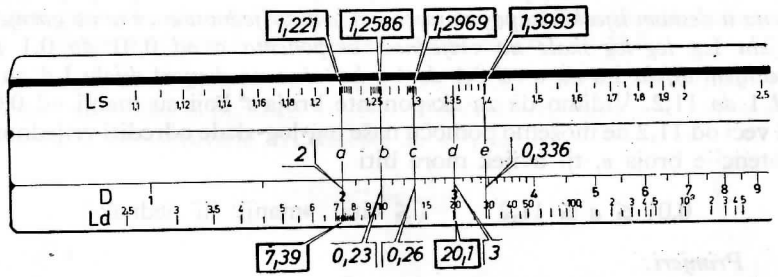
Sl. 42.

Crte donje skale D *štapa imaju za donji dio* Ld *log-log-skale onu vrijednost koja je na njima napisana, za srednji dio* Ls *deset puta, a za gornji dio* Lg *sto puta manju vrijednost.*

Gornji dio Lg log-log-skale počinje sa $1{,}01 = e^{0{,}01}$ i proteže se preko $e^{0{,}1} = 1{,}105$ do 1,1 tako da je kraj te skale vezan na desno produženje skale D, nastavak log-log-skale je srednji dio Ls koji počinje sa 1,10 pa idući preko $e^{0{,}1} = 1{,}105$ i $e^1 = e$ svršava sa crtom vrijednosti 3 tako da je početak i kraj toga dijela log-log-skale vezan na lijevo i desno produženje skale D štapa, konačno i treći donji dio log-log-skale Ld proteže se od 2,5 preko $e^1 = e$ i $e^{10} = 22026$ sve do crte $10^5 = 100000$, pa je na početku i kraju također vezan na produženje skale D štapa.

21.1.2.2. *Log-log-skale računala drugih sustava*

Log-log-skala računala drugih sustava (vidi sl. 43) sastoji se samo od 2 dijela Ls i Ld koja su smještena na prednjoj strani štapa, a odgovaraju istooznačenim dijelovima log-log-skale računala sustava »Darmstadt«, tako *da za donji dio* Ld *imaju crte donje skale* D *štapa onu vrijednost koja je na njima napisana, a za gornji dio* Ls *deset puta manju vrijednost.*



Sl. 43.

Log-log-skala tih računala počinje u lijevom gornjem kraju štapa s 1,1 i proteže se do 3,2 u desnom kraju štapa. Ovaj dio log-log-skale označen je na slici 43 na Ls, dok je skala označena s Ld nastavak log-log-skale Ls, pri čemu se razmak od 2,5 do 3,2 ponavlja; vrijednost posljenje crte te skale Ld je $10^5 = 100.000$.

Prelazimo na izvođenje računskih operacija pomoću log-log-skale.

21.2. Izvođenje računskih operacija pomoću log-log-skala

21.2.1. Određivanje pozitivnih potencija broja $e = 2{,}71828$

21.2.1.1. *Na log-log-skali računala sustava »Darmstadt«*

Znamo već da svakoj crti *a* donje skale D štapa odgovara vrijednost e^a na pripadnoj crti log-log-skale. Prema tome izvadimo li jezik iz štapa, okrenemo li ga oko njegove uzdužne osi za 180°, pa ga opet uvučemo u utore štapa i to tako da iznad početne crte donje skale D štapa stane crta s oznakom *e*, nanesena na donjem dijelu Ld log-log-skale, imat ćemo pred sobom tablicu vrijednosti funkcije e^a za *a* od 0,01 do 11,2. S toga razloga nosi log-log-skala oznaku e^x. Na taj se način postupa ako se ima redom odrediti više vrijednosti *e* . Inače ostavljamo jezik računala u običnom položaju, pa postupamo ovako:

Pomicanjem jezika stavimo eksponent a *iznad konačne crte donje skale* D *štapa, okrenemo računalo oko njegove uzdužne osi, da njegova poleđina bude okrenuta prema nama, pa ispod indeksa crte, koja je smještena u desnom isječku štapa, očitamo traženu vrijednost e , i to na gornjem dijelu* Lg *log-log-skale za vrijednost eksponenta a od* 0,01 *do* 0,1 *na srednjem dijelu* Ls *za* a *od* 0,1 *do* 1 *i konačno na donjem dijelu* Ld *za a od* 1 *do* 11,2. Vidimo da za eksponente broja e^a koji su manji od 0,01 ili veći od 11,2 ne možemo pomoću naše log-log-skale odrediti vrijednosti potencije broja *e*, tj. uvijek mora biti

$$0{,}01 \leqq a \leqq 11{,}2 \qquad (\leqq \text{čitaj »manji ili jednak«})$$

Primjeri:

$e^{0{,}03} = 1{,}0304$ $\qquad$ $e^{0{,}014} = 1{,}0141$
$e^{0{,}3} = 1{,}350$ $\qquad$ $e^{0{,}14} = 1{,}1503$
$e^{3} = 20{,}1$ $\qquad$ $e^{1{,}4} = 4{,}06$

21.2.1.2. *Na log-log-skali drugih sustava računala*

Ispod svakog broja a *donje skale* D *štapa koji leži između* 1 *i* 10 *nalaze se na donjoj log-log-skali* Ld *vrijednosti* e^a, *gdje je* $e = 2{,}71828$ *a za brojeve* a *donje skale* D *štapa koji leži između* 0,1 *i* 1, *vrijednost* e^a *nalazi se na gornjoj log-log-skali* Ls.

Prema tome ako postavimo crtu kazaljke na »1« skale D očitat ćemo ispod crte kazaljke na skali Ld $e = 2{,}718$, a na skali Ls $e^{0{,}1} = 1{,}105$, a ako postavimo na »2« očitat ćemo na Ld $e^2 = 7{,}39$, a na Ls $e^{0{,}2} = 1{,}221$.

Uvijek dakle mora biti $0{,}1 \leqq a \leqq 10$ ($\leqq$ čitaj »manji ili jednak«), tj. eksponent od *e* ne smije biti manji od 0,1 niti veći od 10, odnosno veći od 11,2 ako računamo pomoću desnog nastavka donje skale D štapa.

Prema tome *ako tražimo neku potenciju broja* e *uvijek ćemo zadani eksponent označiti crtom kazaljke na donjoj skali* D *štapa, a traženi rezultat očitat ćemo ispod crte kazaljke ili na donjoj log-log-skali* Ld, *ako taj eksponent leži između* 1 *i* 10 *ili na gornjoj log-log-skali* Ls, *ako eksponent leži između* 0,1 *i* 1.

Primjeri:

$e^{3} = 20{,}1$ (slika 43) $\qquad$ $e^{0{,}23} = 1{,}2586$ (slika 43)
$e^{4{,}25} = 70{,}1$ $\qquad$ $e^{0{,}26} = 1{,}2969$ (slika 43)
$e^{4{,}7} = 110$ $\qquad$ $e^{0{,}336} = 1{,}3993$ (slika 43)

21.2.2. Određivanje negativnih potencija broja *e* i pozitivnih kojima je eksponent manji od 0,01 (0,1), odnosno veći od 11,2

Ako je eksponent broja *e* negativan, očita se najprije vrijednost e^{+a}, a poslije se odredi pomoću skale recipročnih vrijednosti R recipročna vrijednost od dobivene vrijednosti za e^{+a}, jer je

$$e^{-a} = \frac{1}{e^{+a}}$$

Primjeri:

$$e^{-1{,}58} = \frac{1}{e^{1{,}58}} = \frac{1}{4{,}85} = 0{,}206$$

$$e^{-0{,}66} = \frac{1}{1{,}935} = 0{,}517$$

Ako je apsolutna vrijednost eksponenta od *e* manja od 0,01 (odnosno manja od 0,1 ako radimo s računalima drugih sustava) ili veća od 11,2 moramo potenciju od *e* računati običnim logaritamskim putem pomoću skale L računala pamteći radi bržega računanja da je $\log e = 0{,}4343$ ($= M$ modul Briggsovih logaritama) ili zgodno kombiniramo upotrebu log-log-skale i logaritmiranje pomoću skale L.

Primjeri:

e^{12} = numerus (12 · 0,4343) = numerus (5,21) = 162700

$$e^{0,0057} = e^{\frac{0,57}{100}} = \sqrt[100]{e^{0,57}} = \sqrt[100]{1,768} = \text{numerus}\left(\frac{1}{100}\log 1,768\right) =$$
$$= \text{numerus}\,(0,00248) = 1,006.$$

21.2.3. Određivanje prirodnih logaritama brojeva od 1,01 ili 1,1 do 73142 i antiologaritmiranje

21.2.3.1. *Načela računanja*

Neka se traži prirodni logaritam broja b, tj. $\ln b = x$. Po definiciji logaritma možemo pisati:

$$e^x = b,$$

a to znači, određivanje prirodnih logaritma zadanog broja b svodi se na određivanje eksponenta broja e, tj. ima se izvršiti operacija koja je obratna od one što smo je izvršili kad smo računali potencije broja e. Antilogaritmiranje, tj. određivanje numerusa x iz zadane vrijednosti a prirodnog logaritma, svodi se na već nam poznato određivanje vrijednosti e^a (vidi 21, tačku 2) jer iz

$$\ln x = a$$

po definiciji logaritma slijedi:

$$x = e^a$$

21.2.3.2. *Na log-log-skali računala sustava »Darmstadt«*

Da odredimo vrijednost ln *b na log-log-skali računala sustava* »Darmstadt« *okrenemo računalo poleđinom prema gore i stavimo pod indeksnu crtu, smještenu u desnom isječku štapa, zadani numerus b. Tada na prednjoj strani računala nad konačne crte donje skale štapa leži na donjoj skali* C *jezika tražena vrijednost* ln b, *koja ima* »—1« *mjesto,* »0« *mjesta ili* »+1« *mjesto već prema tome da li se numerus* b *nalazio na gornjem* Lg, *srednjem* Ls *ili donjem* Ld *dijelu log-log-skale.*

Primjeri:

ln 1,04 = 0,0392	ln 1,024 = 0,0237
ln 1,48 = 0,392	ln 1,635 = 0,492
ln 50 = 3,92	ln 3,55 = 1,267

Pri antilogaritmiranju, tj. određivanju numerusa x iz ln $x = a$ *vrši se obratan postupak pri čemu se x čita na gornjem* Lg, *srednjem* Ls *ili donjem* Ld *dijelu log-log-skale, već prema tome da li zadana vrijednost a prirodnog logaritma ima* »—1« *mjesto,* »0« *mjesta ili* »+1« *mjesto.*

Primjeri:

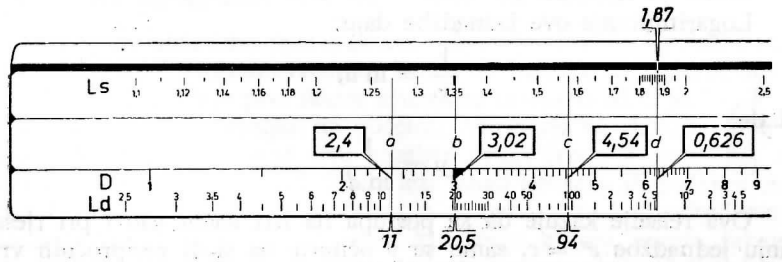
ln x = 0,0488;	x = numerus (0,0488) = 1,05
ln x = 0,340;	x = numerus (0,340) = 1,405
ln x = 1,099;	x = numerus (1,099) = 3

21.2.3.3. *Na log-log-skali drugih sustava računala*

Ispod, odnosno iznad svakog broja b *log-log-skala* Ls *i* Ld *leži na donjoj skali* D *štapa prirodni logaritam* a *toga broja, tj.* ln b = a. *Vrijednost toga logaritma ležat će između* 0,1 *i* 1, *tj. imat će* »0« *mjesta ako je numerus uzet na skali* Ls, *ili između* 1 *i* 11,2, *tj. logaritam će imati* »+ 1« *mjesto ako je numerus uzet na skali* Ld.

Primjeri:

ln 94 = 4,54 (slika 44)
ln 1,87 = 0,626 (slika (44)



Sl. 44.

Obrnuto: *iznad, odnosno ispod svakoga broja* a *skale* D *koji nije manji od* 0,1 *i nije veći od* 11,2 *leži na log-log-skali broj kome je prirodni logaritam jednak tome broju* a, *tj. leži numerus broja* a *i to na skali* Ls *ako je* $0,1 \leqq a \leqq 1$ *ili na skali* Ld *ako je* $1 \leqq a \leqq 11,2$.

Primjeri:

ln x = 0,693;	x = numerus (0,693) = 2
ln x = 2,64;	x = 14

21.2.4. Rješavanje eksponencijalnih jednadžbi oblika $e^x = c$ i $e^{\frac{1}{y}} = d$

21.2.4.1. *Eksponencijalna jednadžba* $e^x = c$

Logaritmirajući po bazi e jednadžbu $e^x = c$ dobivamo:

$$x \cdot \ln e = \ln c$$

Ali $\ln e = 1$, dakle:

$$x = \ln c$$

Iz ovog izraza vidimo da se određivanje x iz jednadžbe $e^x = c$ svodi na već nam poznato određivanje vrijednosti prirodnog logaritma (vidi 2.1.2.3.).

Primjeri:

$e^x = 20{,}5$; $x = 3{,}02$ (slika 44)
$e^x = 11$; $x = 2{,}4$ (slika 44)
$e^x = 1{,}202$; $x = 0{,}184$

21.2.4.2. *Eksponencijalna jednadžba* $e^{\frac{1}{y}} = d$

Slično se rješava i jednadžba $e^{\frac{1}{y}} = d$

Logaritmiranje ove jednadžbe daje:

$$\frac{1}{y} = \ln d,$$

odatle:

$$y = \frac{1}{\ln d}$$

Ova relacije kazuje da se postupa na isti način kao i pri rješavanju jednadžbe $e^x = c$, samo se y očitava na skali recipročnih vrijednosti R.

Primjeri:

$$e^{\frac{1}{y}} = 1{,}485; \quad y = \frac{1}{\ln 1{,}485} = 2{,}529$$

Broj mjesta: $0 + 1 = 1$.

$$e^{\frac{1}{y}} = 14{,}5; \quad y = 0{,}374$$

Broj mjesta: $-(+1) + 1 = 0$.

21.2.5. Određivanje općenite potencije

21.2.5.1. *Načela računanja*

Nazivamo li $b^s = x$ i logaritmiramo li po bazi e ovaj izraz, dobijemo:

$$\ln x = s \cdot \ln b,$$

odatle:

$$x = \text{numerus}\ (s \cdot \ln b).$$

Iz posljednjeg izraza jasno slijedi postupak pri određivanju vrijednosti x općenite potencije b^s pomoću log-log-skale, ako vrijednost baze b i vrijednost same potencije b^s leže između 1,01 i 73142, odnosno između 1,1 i 73142 za računala drugih sustava.

Odredi se najprije nama već poznatim načinom vrijednost $\ln b$ *koja se izmnoži s eksponentom s na donjim skalama* C *i* D *računala. Odredi li se sada na nama također poznat način numerus ovoga produkta* $s \cdot \ln b$, *tj. broj kome je prirodni logaritam jednak vrijednosti* $s \cdot \ln b$, *bit će taj broj tražena vrijednost x opće potencije* b^s.

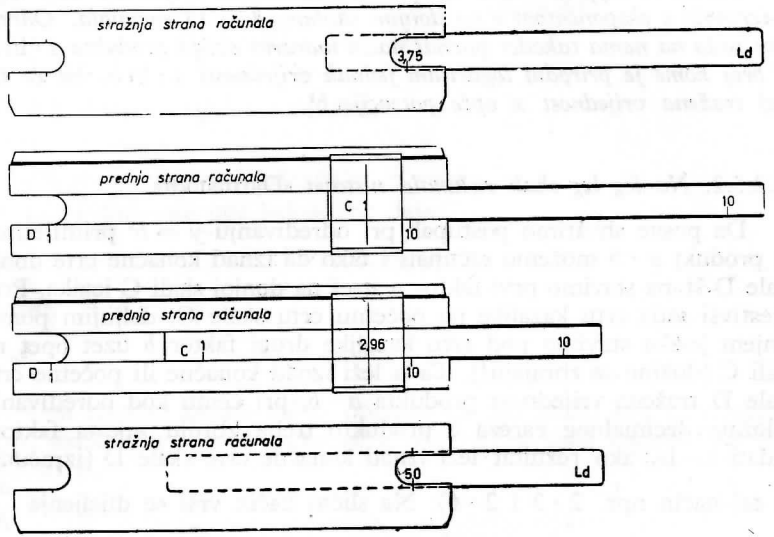
21.2.5.2. *Na log-log-skali računala sustava* »Darmstadt«

Da posve shvatimo postupak pri određivanju $y = b^s$ primijetimo da produkt $a \cdot b$ možemo računati i tako da iznad konačne crte donje skale D štapa stavimo prvi faktor a uzet na donjoj skali C jezika. Premjestivši sada crtu kazaljke na početnu crtu skale C, daljnjim pomicanjem jezika stavimo pod crtu kazaljke drugi faktor b uzet opet na skali C (dužine se zbrajaju!). Tada leži iznad konačne ili početne crte skale D tražena vrijednost produkta $a \cdot b$, pri čemu kod određivanja položaja decimalnog zareza u produktu treba zbroju mjesta faktora dodati »−1«, ako rezultat leži iznad konačne crte skale D (izračunaj na taj način npr. $2 \cdot 3$ i $2 \cdot 6$). Na slični način vrši se dijeljenje $\frac{a}{b}$, razlika je samo u tome da se nakon postavljanja brojnika a iznad konačne odnosno početne crte skale D crta kazaljke namjesti iznad nazivnika b uzetog na skali C, pa se pomicanjem jezika stavi pod crtu kazaljke početna odnosno konačna crta skale C (dužine se oduzimaju!). Dodatak »+ 1« daje opet samo konačna crta skale D. (Izračunaj na taj način npr. $6 : 3$ i $12 : 2$.)

Postupak za određivanje vrijednosti b^s je ovaj:

Bazu b *uzetu na log-log-skali stavimo pod indeksnu crtu smještenu u desnom isjeku štapa, pa okrenuvši računalo u obični položaj i namjestivši crtu kazaljke na početnu crtu donje skale* C *jezika, pomicanjem jezika stavimo pod tako namještenu crtu kazaljke eksponent s uzet na skali* C. *Tada okrenuvši računalo čitamo na log-log-skali traženu vrijednost* b^s *i to ispod desne indeksne crte, odnosno ispod lijeve crte, ako ispod desne crte ne možemo ništa na log-log-skali očitati.*

Da odredimo na kojem dijelu log-log-skale imamo očitati taj rezultat moramo izračunati po poznatom nam pravilu broj mjesta produkta $s \cdot \ln b$ pamteći da $\ln b$ ima »—1« mjesto, »0« mjesta ili »+ 1« mjesto u zavisnosti od toga, leži li b na gornjem Lg, srednjem Ls ili donjem Ld dijelu log-log-skale i da zbroj mjesta faktora dobiva dodatak »—1« ako tražena vrijednost potencije b^s leži ispod desne indeksne crte, inače dodatka nema.



Sl. 45.

Vrijednost b^s se čita:

1) na gornjem dijelu Lg log-log-skale ako produkt $s \cdot \ln b$ ima »—1« mjesto,

2) na srednjem dijelu Ls log-log-skale ako produkt $s \cdot \ln b$ ima »0« mjesta,

3) na donjem dijelu Ld log-log-skale ako produkt $s \cdot \ln b$ ima »+ 1« mjesto.

Slika 45 zorno prikazuje opisani postupak pri određivanju vrijednosti potencije $3{,}75^{2{,}96} = 50$.

Rezultat 50 očitan je na donjem dijelu Ld log-log-skale, jer produkt $2{,}96 \cdot \ln 3{,}75$ ima »+ 1« mjesto $(+ 1 + 1 - 1 = + 1)$.

Primjeri:

$1{,}015^5 = 1{,}0773$ (čitamo na Lg, jer produkt ima »— 1« mjesto: $- 1 + 1 - 1 = - 1$)

$1{,}015^{12} = 1{,}196$ (čitamo na Ls, jer produkt ima »0« mjesta: $- 1 + + 2 - 1 = 0$)

$1{,}015^{81} = 3{,}34$ (čitamo na Ld, jer produkt ima »+ 1« mjesto: $- 1 + 2 = + 1$)

$4{,}5^{1{,}8} = 15$ (čitamo na Ld, jer produkt ima »+ 1« mjesto: $+ 1 + + 1 - 1 = + 1$)

$4{,}5^{0{,}18} = 1{,}311$ (čitamo na Ls, jer produkt ima »0« mjesta: $+ 1 + + 0 - 1 = 0$)

$4{,}5^{0{,}018} = 1{,}0275$ (čitamo na Lg, jer produkt ima »— 1« mjesto: $+ 1 - 1 - 1 = - 1$)

$8{,}1^{0{,}77} = 5$ (čitamo na Ld, jer produkt ima »+ 1« mjesto: $+ 1 + + 0 = + 1$)

$8{,}1^{0{,}0077} = 1{,}0162$ (čitamo na Lg, jer produkt ima »— 1« mjesto: $+ 1 - 2 = - 1$).

Vidi također primjere na str. 113.

Primjedbe

1. Ima li produkt $s \cdot \ln b$ više od jednog pozitivnog ili negativnog mjesta, vrijednost b^s pada izvan područja brojeva log-log-skale pa se računa običnim logaritamskim putem pomoću skale L (vidi 16). Slično se može postupati ako je baza b veća od 10^5.

2. Ako je baza b potencije b^s manja od 1 pa je nema na log-log-skali, množimo i dijelimo potenciju sa 10^s ili 100^s i izračunavši pomoću log-log-skale brojnik i nazivnik dijelimo ih na skalama C i D računala. U tom slučaju vrijednost potencije ne mora ležati unutar područja brojeva log-log-skale.

Navedeni način računanja ima veliku prednost prema običnom logaritmiranju pomoću skale L računala samo tada, kada je baza b manja od 1.

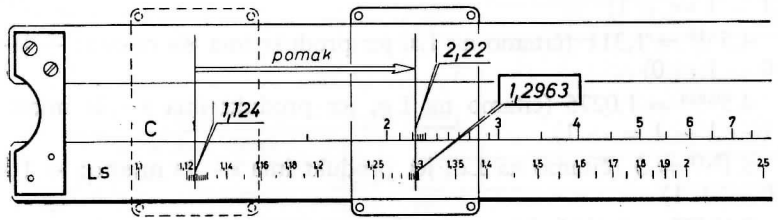
Primjeri:

$$0{,}1278^{1{,}4} = \frac{1{,}278^{1{,}4}}{10^{1{,}4}} = \frac{1{,}410}{25{,}1} = 0{,}0562$$

$$0{,}0559^{0{,}286} = \frac{5{,}59^{0{,}286}}{100^{0{,}286}} = \frac{1{,}636}{373} = 0{,}438$$

21.2.5.3. *Na log-log-skali drugih sustava računala*

Pri određivanju vrijedno $x = b^s$, odnosnost x = numerus $(s \cdot \ln b)$ ni vrijednost $\ln b$, ni vrijednost produkta $s \cdot \ln b$ ne očitaju se, samo se odredi poznatim pravilom broj mjesta ovoga produkta, pamteći da $\ln b$ ima »0« mjesta ako b leži na skali Ls, a ako b leži na skali Ld, $\ln b$ ima »+ 1« mjesto.



Sl. 46.

Ako je broj mjesta toga produkta »0« tražena se vrijednost potencije b^s očita na skali Ls, a ako produkt ima »+ 1« mjesto vrijednost b^s se očita na Ld.

Pokažimo postupak na primjerima:

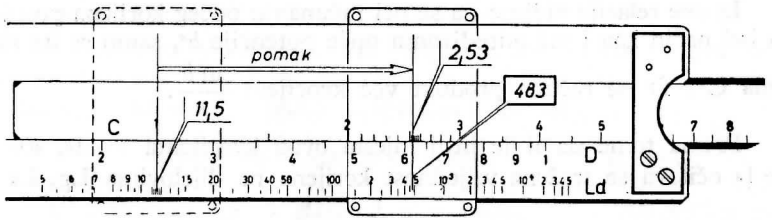
1) $1{,}124^{2{,}22} = 1{,}2963$ (sl. 46).

Postavimo pomoću crte kazaljke početnu crtu donje skale C jezika iznad 1,124 gornje log-log-skale Ls, prenesimo crtu kazaljke na 2,22 skale C pa uočivši da produkt 2,22 · ln 1,124 ima »0« mjesta čitamo traženi rezultat 1,2963 ispod crte kazaljke na gornjoj log-log-skali Ls.

(Ako bi produkt pao izvan skale D ne bismo upotrebili početnu već konačnu crtu skale C).

2) $11{,}5^{2{,}53} = 483$ (sl. 47).

U ovom slučaju traženi rezultat 483 očitamo na donjoj log-log-skali Ld, jer produkt 2,53 · ln 11,5 ima »+ 1« mjesto.



Sl. 47.

$2000^{0{,}16} = 3{,}374$ (čitamo na Ld, jer produkt ima »+ 1« mjesto)
$2000^{0{,}016} = 1{,}1293$ (čitamo na Ls, jer produkt ima »0« mjesta)
$1{,}196^{25{,}3} = 92$ (čitamo na Ld, jer produkt ima »+ 1« mjesto)
$1{,}254^{13} = 18{,}9$ (čitamo na Ld, jer produkt ima »+ 1« mjesto)
$1{,}145^{7} = 2{,}58$ (čitamo na Ls, jer produkt ima »0« mjesta)
$1{,}665^{3{,}15} = 4{,}98$ (čitamo na Ld, jer produkt ima »+ 1« mjesto)
$2{,}46^{2{,}32} = 8{,}06$ (čitamo na Ld, jer produkt ima »+ 1« mjesto)
$2{,}24^{5} = 56{,}4$ (čitamo na Ld, jer produkt ima »+ 1« mjesto)

Vidi također primjere na str. 111.

21.2.6. Određivanje općenitog korijena $\sqrt[r]{b}$

Slično se računa i korijen $\sqrt[r]{b}$, opet uz uvjet da vrijednosti radikanda b i korijena $\sqrt[r]{b}$ leže između 1,01 i 73142, odnosno između 1,1 i 73142 za računala drugih sustava.

Eksponent korijena r može biti cio broj ili decimalni razlomak.

Neka je $\sqrt[r]{b} = x$.

Logaritmirajući po bazi e dobivamo:

$$\ln x = \frac{\ln b}{r}$$

odatle

$$x = \sqrt[r]{b} = \text{numerus}\left(\frac{\ln b}{r}\right)$$

Iz ove relacije vidimo da se pri računanju općeg korijena postupa na isti način kao i pri određivanju opće potencije b^s, samo se na skalama C i D ne računa produkt već kvocijent $\frac{\ln b}{r}$.

Prema tome da li je broj mjesta ovog kvocijenta »— 1«, »0« ili »+ 1« očitava se tražena vrijednost korijena na dijelovima Lg, Ls ili Ld log-log-skale. Kako je $\sqrt[r]{b} = b^{\frac{1}{r}}$ može se $\sqrt[r]{b}$ računati i kao potenciju b^s prethodno izračunavši $s = \frac{1}{r}$ pomoću skale R. Kao b^s računaju se uvijek izrazi oblika $\sqrt[r]{b^q} = b^{\frac{q}{r}}$ uz prethodno izračunavanje eksponenta $s = \frac{q}{r}$ na skalama C i D računala.

Primjeri:

$\sqrt[4]{1{,}625} = 1{,}129$ (čitaj na Ls, jer kvocijent ima »0« mjesta)

$\sqrt[4{,}7]{2{,}44} = 1{,}209$ (čitaj na Ls, jer kvocijent ima »0« mjesta)

$\sqrt[0{,}47]{2{,}44} = 6{,}67$ (čitaj na Ld, jer kvocijent ima »+1« mjesto)

$\sqrt[31{,}5]{51{,}2} = 1{,}133$ (čitaj na Ls, jer kvocijent ima »0« mjesta)

$\sqrt[5]{1000} = 3{,}98$ (čitaj na Ld, jer kvocijent ima »+ 1« mjesto)

$\sqrt[24{,}6]{700} = 1{,}305$ (čitaj na Ls, jer kvocijent ima »0« mjesta)

$\sqrt[7]{2{,}68} = 1{,}1512$ (čitaj na Ls, jer kvocijent ima »0« mjesta)

$\sqrt[3{,}16]{22} = 2{,}66$ (čitaj na Ls, jer kvocijent ima »0« mjesta)

$\sqrt[7]{1{,}238^{3{,}122}} = 1{,}238^{0{,}446} = 1{,}100$ (čit na Lg, jer produkt ima »— 1« mjesto).

22. ZNAČENJE I UPOTREBA NEKIH ZNAKOVA NA RAČUNALU I KAZALJKE S TRI INDEKSNE CRTE

22.1. Znakovi: π, $\frac{1}{\pi}$, M i $\frac{\pi}{4}$

Na svakom su računalu označeni neki čvrsti znakovi koji olakšavaju računanje. Tako je npr. broj $\pi = 3{,}1416$ označen posebnom crticom, a kadšto i njegova recipročna vrijednost

$$\frac{1}{\pi} = 0{,}31830, \text{ znak } M = 0{,}4343 \text{ i } \frac{\pi}{4} = 0{,}78539.$$

Ovamo pripadaju i znakovi $\rho' = 3438'$, $\rho'' = 206265''$ i $\rho_{,,} = 636620^{cc}$ o kojima je već bilo govora.

22.2. Određivanje površine kruga

22.2.1. Načelo računanja

U mnogim tehničkim računima vrlo je često potrebno odrediti površinu Q poprečnog kružnog presjeka zadanog promjera d ili izvesti obrnut zadatak — odrediti promjer d iz zadane površine Q kruga.

Znamo da je površina Q kruga promjera d dana formulom:

$$Q = \pi \frac{d^2}{4}$$

Ovaj izraz možemo pisati i ovako:

$$Q = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 = \frac{d^2}{\frac{4}{\pi}} = \left(\frac{d}{\sqrt{\frac{4}{\pi}}}\right)^2$$

Broj $\sqrt{\frac{4}{\pi}} = 1{,}128$ označimo s c.

Uvrstimo li $\sqrt{\frac{4}{\pi}} = c$ u Q imat ćemo: $Q = \left(\frac{d}{c}\right)^2$.

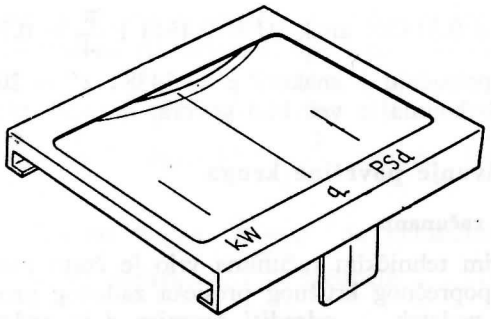
Iz ove formule jasno slijedi pravilo za određivanje površine Q kruga zadanoga promjera d pomoću znaka c: treba d podijeliti sa c pa rezultat kvadrirati.

Te operacije se vrše na računalu najbrže i najjednostavnije pomoću kazaljke s tri indeksne crte.

22.2.2. Određivanje površine kruga pomoću kazaljke s tri indeksne crte

22.2.2.1. *Načelo računanja*

Sl. 48 prikazuje kazaljku računala sustava »Darmstadt« koja ima osim srednje (glavne) crte još dvije crte nejednako daleko od srednje. Srednja crta nosi oznaku q, a krajnje kW i PS d.



Sl. 48.

Stavimo li srednju (q) crtu takve kazaljke na početnu crtu donje skale D štapa past će desna crta kazaljke (d) na crticu

$$1{,}128 = \sqrt{\frac{4}{\pi}} = c \quad \text{[vidi 22.2.1.)]}.$$

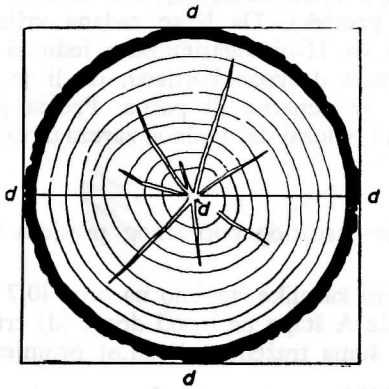
Dakle: međusobna udaljenost srednje i desne crte kazaljke jednaka je dužini log $\sqrt{\frac{4}{\pi}}$ izraženoj u jedinici donje skale D štapa.

Prema tome ako postavimo desnu crtu (d) kazaljke na neki broj d donje skale D štapa ležat će ispod srednje crte (q) kazaljke na skali D kvocijent $\frac{d}{c}$, a na gornjoj skali A štapa $\left(\frac{d}{c}\right)^2$, tj. vrijednost površine Q kruga kome je promjer jednak d.

Imajući dakle kazaljku s tri crte mogu se bez pomicanja jezika riješiti zadaci koji slijede.

22.2.2.2. *Određivanje kružnoga poprečnog presjeka Q iz zadanoga promjera* d

Postavi li se desna (d) crta kazaljke iznad zadanoga promjera d donje skale D štapa, ležat će na gornjoj skali A štapa ispod srednje (q) crte kazaljke površina Q dotičnog kružnog poprečnog presjeka.



Sl. 49.

Kako je površina kruga promjera d $\left(Q = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi}{4} d^2 = 0{,}785\ d^2\right)$ nešto manja od površine kvadrata sa stranicama d $Q = d^2$, vidi sl. 49), možemo u većini slučajeva uzeti da je broj mjesta u površini kruga promjera d jednak broju mjesta u d^2, a broj mjesta kvadrata znamo odrediti (vidi 13.2.2.).

Primjeri:

Odredi površinu Q kružnoga poprečnog presjeka kome je promjer $d = 5{,}8$ cm.

Iznad broja 5,8 donje skale D štapa stavimo desnu (d) crtu kazaljke pa traženu vrijednost površine $Q = 26{,}4$ cm² očitamo ispod srednje (q) crte kazaljke na gornjoj skali A štapa. (Broj mjesta rezultata: $1 \cdot 2 = 2$).

Isto: $d = 0{,}238$ m $\quad Q = ?$
$\underline{Q = 0{,}0445\ \text{m}^2}$

broj mjesta: $0 \cdot 2 - 1 = -1$.

Isto: $r = 6{,}65$ cm $\quad Q = ?$
$d = 2r = 13{,}30$ cm. $\underline{Q = 139\ \text{cm}^2}$

Broj mjesta: $2 \cdot 2 - 1 = 3$.

22.2.2.3. *Određivanje promjera d kružnog poprečnog presjeka iz njegove zadane površine Q*

Postavi li se srednja (q) crta kazaljke na zadanu vrijednost Q kružnoga poprečnog presjeka i to na gornjoj skali A štapa, ležat će na donjoj skali D štapa ispod desne (d) crte kazaljke traženi promjer d dotičnog kružnog presjeka. Da li se zadana vrijednost površine Q postavi na I-oj ili na II-oj logaritamskoj jedinici skale A odlučuje, kao i pri određivanju drugoga korijena, da li je mjerodavna grupa zadane vrijednosti Q neparna ili parna. Prema pravilima za drugi korijen određuje se i položaj decimalnog zareza u rezultatu (vidi 13.3.2.).

Primjeri:

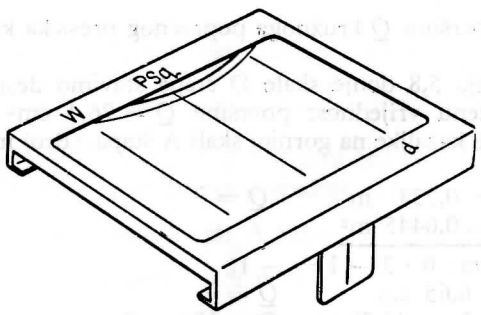
Odredi promjer kružnog poprečnog presjeka kome površina iznosi 40,7 cm².

Srednju (q) crtu kazaljke stavimo na broj 40,7 II-ge logaritamske jedinice gornje skale A štapa pa ispod desne (d) crte kazaljke očitamo na donjoj skali D štapa traženu vrijednost promjera 7,2 cm.

Isto: $Q = 0{,}0298\ \text{m}^2$ $\quad d = ?$
$d = 0{,}195\ \text{m}$

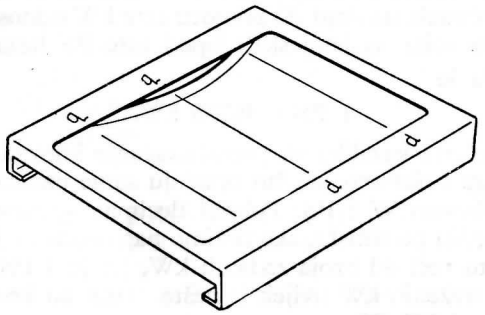
Isto: $Q = 154\ \text{cm}^2$ $\quad d = ?$
$d = 14\ \text{cm}$

Vrlo često imaju računala kazaljku s tri crte oblika kako je to prikazano na slici 50.



Sl. 50.

Srednja (PS q) i desna (d) indeksna crta takve kazaljke odgovaraju istim crtama već opisane kazaljke, pa služe za rješavanje zadatka 2. i 3. što se vrši na isti već navedeni način.



Sl. 51.

Primjedba

Starija računala imaju kazaljku s tri crte koje su jednako daleko od srednje crte (vidi sl. 51). Pomoću tih crta rješavaju se na već navedeni način gore opisana četiri zadatka, razlika je samo u tome da mjesto srednje i desne crte koje smo do sada isključivo upotrebljavali možemo da se služimo također lijevom i srednjom crtom.

22.2.3. Preračunavanje kilovata u konjske snage i obratno

Kako se vidi iz slika 48 i 50 krajnje crte kazaljke računala sustava »Darmstadt« i drugih sustava nisu jednako daleko od srednje (glavne) crte. Dok je razmak između srednje i desne crte jednak $\log \sqrt{\frac{4}{\pi}}$ pa te crte služe za određivanje površine kruga, razmak između lijeve (kW) i desne (PS) crte kazaljke, a za računala drugih sustava razmak između lijeve (W) i srednje (PS) crte jednak je dužini komplementa $\log 736$, tj. $\operatorname{colog} 736 = -\log 736 = \log \frac{1}{736}$. Da se u to uvjerimo postavimo crtu kazaljke koja je označena s PS na konačnu crtu donje skale D štapa (za druga računala — gornje skale A štapa). Tada ćemo ispod crte označene sa kW odnosno sa W očitati na istoj skali broj 736. Ako

dakle hoćemo da neki broj pomnožimo sa 736 moramo ga označiti na skali D (za druga računala na skali A) crtom PS kazaljke pa ćemo ispod crte kW odnosno W kazaljke očitati na istoj skali traženi produkt.

U slučaju dijeljenja nekog broja sa 736 označi se taj broj na skali D (za druga računala na skali A) pomoću crte kW odnosno W kazaljke, a okvocijent se očita na istoj skali ispod crte PS kazaljke.

Budući da je

$$1 \text{ PS} = 0{,}736 \text{ kW},$$

služe nam ove crte kazaljke za preračunavanje kilovata odnosno vata u konjske snage i obratno, na što upućuju same oznake ovih crta kazaljke: kW odnosno W i PS. Položaj decimalnog zareza u rezultatu lako ćemo odrediti po smislu, ako držimo na pameti da je broj traženih PS uvijek nešto veći od broja zadanih kW, jer je 1 PS = 0,736 kW i obratno: broj traženih kW uvijek je nešto manji od broja zadanih PS, jer je 1 kW = 1,359 PS.

Primjeri:

1. Treba preračunati 4,5 kW u PS.

Postavimo lijevu crtu kW odnosno W kazaljke na 4,5 donje skale D štapa (za druga računala — gornje skale A štapa) pa čitamo traženi broj konjskih snaga 6,12 PS na istoj skali ispod crte PS kazaljke.

2. 15 kW u PS = 20,4 PS

3. 0,563 kW u PS = 0,765 PS

4. Treba preračunati 134 PS u kW.

Postavimo crtu PS kazaljke na 134 donje skale D štapa (za druga računala — gornje skale A štapa) pa čitamo traženi broj kilovata 98,6 kW na istoj skali ispod crte kW odnosno W kazaljke.

5. 62,5 PS u kW = 46,0 kW

6. 0,286 PS u kW = 0,210 kW.

Primjedba

Spomenimo da osim gore opisanih tehničkih računala sustava »Rietz« i »Darmstadt« postoji još čitav niz specijalnih računala namijenjenih izvođenju računskih operacija iz pojedinih područja tehnike, trgovine i industrije. Postoje računala za kemiju, željezo-betonske konstrukcije, tahimetriju itd.

Završavajući tumačenje upotrebe navedenih tehničkih računala htjeli bismo još jednom naglasiti, da s primjerima koje smo u toku

razlaganja naveli nije ni izdaleka iscrpljena mogućnost primjene logaritamskog računala.

Čak i za aditivne i suptraktivne operacije može se primijeniti računalo, ako se ovi zadaci mogu pretvoriti u multiplikativne ili divizione. Taj se način primjenjuje npr. pri određivanju katete pravokutnoga trokuta iz zadane hipotenuze i druge katete (vidi dalje).

Daljnje primjene logaritamskoga računala bile bi: rješavanje sustava algebarskih jednadžbi linearnih, kvadratnih i kubnih, rješavanje zadataka iz trigonometrije itd.

23. O MOGUĆNOSTI NAJŠIRE PRIMJENE LOGARITAMSKOG RAČUNALA

Tko temeljito prouči logaritamsko računalo i uvježba se u računanju tim instrumentom lako će sam riješiti većinu tih zadataka, pri čemu će uvijek izabrati onaj način računanja koji njemu najbolje odgovara. U tome leži još jedna velika prednost logaritamskog računala. Logaritamsko računalo nije mrtvi instrument na kojem se svaki račun izvodi na već unaprijed određen jedinstven način. Ne, kombinirajuć različite skale računala mnoge računske operacije možemo izvršiti na više načina, pa će svaki uvježbani tehničar uvijek naći svoje putove i načine da što brže i što jednostavnije dođe do traženog rezultata.

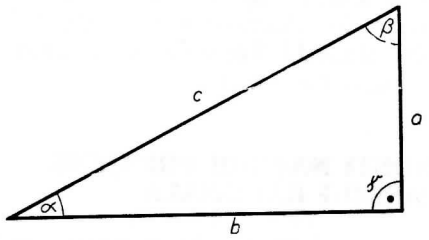
Da dademo podstrek za što širu primjenu logaritamskog računala pri rješavanju najrazličitijih problema, kazat ćemo na kraju još nekoliko riječi o rješavanju trokuta.

23.1. Rješavanje pravokutnih trokuta

Rješavanje pravokutnih trokuta pomoću logaritamskog računala ne čini nikakvih teškoća jer se svodi na računanje jednostavnih izraza $a = c \sin \alpha = b \operatorname{tg} \alpha$, $c = \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$ itd.,* koji se računaju tako da se najprije na računalu odredi vrijednost goniometrijske funkcije, koja se iza toga množi sa zadanom stranicom ili kojom se ta stranica dijeli. Tko radi računalom sustava »Darmstadt« znatno će ubrzati računanje ako hipotenuzu $c = \frac{a}{\sin \alpha}$ računa tako da postavivši in-

* Vidi npr. od istog pisca: Repetitorij elementarne matematike, Tehnička knjiga, Zagreb.

deksnu crtu na kut α, uzet na skali $\angle$ sin, namjesti početnu, odnosno konačnu crtu jezika iznad katete a uzete na donjoj skali D štapa. Tada će se pod crtom kazaljke na skali *recipročnih vrijednosti* R očitati tražena vrijednost hipotenuze c, jer iz $c = \frac{a}{\sin \alpha}$, odnosno $c \sin \alpha = a$



Sl. 52.

slijedi, da je $\frac{\sin \alpha}{\frac{1}{c}} = a$. Položaj decimalnog zareza u rezultatu lako se odredi po smislu, jer je uvijek hipotenuza c nešto veća od katete a.

Primjeri:

1. $\alpha = 30°$, $a = 7{,}66$

$$c = \frac{7{,}66}{\sin 30°} = 15{,}32$$

2. $\alpha = 54°21'$, $a = 47{,}54$

$$c = \frac{47{,}54}{\sin 54{,}35°} = 58{,}6$$

Kažimo nekoliko riječi još o tome kako se može odrediti kateta pravokutnog trokuta iz zadane hipotenuze i druge katete bez prethodnog izračunavanja kutova.

Treba izračunati katetu a pravokutnog trokuta iz zadane hipotenuze c i druge katete b.

Po Pitagorinom poučku bit će:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{(c + b)(c - b)}$$

Ispisavši zadane vrijednosti za c i b jednu ispod druge i zabilježivši na papiru njihovu sumu i razliku, računamo na gornjim skalama A i B računala produkt sume i razlike, a na donjoj skali D štapa očitamo drugi korijen iz tog produkta, tj. vrijednost tražene katete a.

Prema tome ako je npr. hipotenuza $c = 50$ cm, a kateta $b = 38{,}3$ cm, bit će druga kateta:

$$a = \sqrt{50^2 - 38{,}3^2} = \sqrt{(50 + 38{,}3)(50 - 38{,}3)} =$$
$$= \sqrt{88{,}3 \cdot 11{,}7} = 32{,}14 \text{ cm}$$

23.2. Rješavanje kosokutnih trokuta

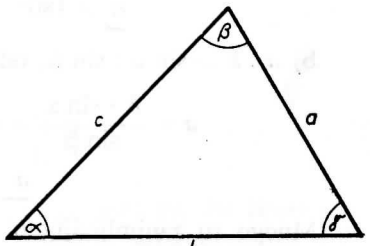
Isto tako ne čini nikakvih teškoća rješavanje kosokutnih trokuta u svim slučajevima kad se primjenjuje sinusov poučak,* jer se tada rješavanje svodi na računanje po trojnom pravilu koje počinje uvijek određivanjem vrijednosti goniometrijske funkcije.

Navedimo primjere za ona dva slučaja kad se trokut rješava po sinusovom poučku:

23.2.1. Rješavanje trokuta u kojem je zadana jedna stranica i dva kuta

Zadano:

$c = 53{,}7$ m,
$\alpha = 37{,}3°$
$\beta = 79{,}7°$.



Sl. 53.

Traži se: γ, a, b.

Računamo:

$\gamma = 180° - (\alpha + \beta) = 63°$

Po sinusovom poučku imamo:

a) $a : c = \sin \alpha : \sin \gamma$, odatle

$$a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} = \frac{\sin 37{,}3° \cdot 53{,}7}{0{,}891} = 36{,}5$$

$$\underline{a = 36{,}5 \text{ m}}$$

* Vidi opasku na str. 121.

b) $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$, odatle

$$b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin 79{,}7° \cdot 53{,}7}{0{,}891} = 59{,}3$$

$$\underline{b = 59{,}3 \text{ m}}$$

23.2.2. Rješavanje trokuta u kojem su zadane dvije stranice i kut koji leži nasuprot jednoj od tih stranica

Zadano:

$$b = 26{,}3 \text{ m}$$
$$c = 21{,}5 \text{ m}$$
$$\beta = 70{,}2°$$

Traži se: γ, α, a.

Po sinusovom poučku imamo:

a) $\sin\gamma : \sin\beta = c : b$, odatle

$$\sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{b} = \frac{\sin 70{,}2° \cdot 21{,}5}{26{,}3}$$

Slijedi: $\underline{\gamma = 50{,}4°}$

$$\underline{\alpha} = 180° - (\beta + \gamma) = \underline{59{,}4°}$$

b) $a : b = \sin a : \sin\beta$, odatle

$$a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{\sin 59{,}4° \cdot 26{,}3}{0{,}941} = 24{,}0$$

$$\underline{a = 24{,}0 \text{ m}}$$

Mnogo su zanimljiviji oni slučajevi kad se trokut ne da riješiti po sinusovom poučku. Promotrimo potanko te slučajeve.

23.2.3. Rješavanje trokuta u kojem su zadane dvije stranice i kut između njih

Zadano: b, c, α.

Traži se: β, γ, a.

Pretpostavimo da je $c > b$, tada je i traženi kut γ veći od drugog traženog kuta β.

Po sinusovom poučku imamo:

$$\sin\beta : \sin\gamma = b : c, \text{ a odatle je } \sin\beta = \frac{\sin\gamma \cdot b}{c}$$

Dajući većem kutu γ vrijednosti po volji, računamo za *svaki* uzeti kut γ zbroj $(\gamma + \beta)$ koji je poznat, jer je $\gamma + \beta = 180° - \alpha$. Postupak ponavljamo toliko puta dok izračunani zbroj kutova $(\gamma + \beta)$ ne bude jednak $(180° - \alpha)$. Tada su kutovi γ i β određeni pa računamo po sinusovom poučku stranicu a i to pomoću manje stranice b i manjeg kuta β za koji smo na kraju određivanja kutova zabilježili vrijednost sinusa:

$$a : b = \sin\alpha : \sin\beta$$

odatle

$$a = \frac{\sin a \cdot b}{\sin\beta}$$

Početnu vrijednost većeg kuta γ može se uzeti i iz približne slike trokuta.

Primjer 1.

Zadano: $b = 36{,}0$ m, $c = 47{,}0$ m, $\alpha = 67°$.

Traži se: β, γ, a.

$c > b$ dakle je

$\gamma > \beta$

$\gamma + \beta = 180° - 67° = 113°$

$$\sin\beta = \frac{\sin\gamma \cdot 36{,}0}{47{,}0}$$

Za početnu vrijednost kuta uzmimo npr. 60°, pa ako imamo računalo sustava »Darmstadt« stavimo indeksnu crtu prednjeg ruba kazaljke na kut $\gamma = 60°$ skale $\angle$ sin, pomicanjem jezikana mjestimo pod glavnu crtu kazaljke stranicu $c = 47{,}0$ uzetu na donjoj skali C jezika. Premjestimo li sada crtu kazaljke na $b = 36{,}0$ donje skale C jezika očitat ćemo na skali $\angle$ sin kut $\beta = 41{,}6°$. Zbroj γ i β daje 101,6°, a morao bi biti 113°, dobili smo dakle premalo. Stoga povećamo kut, uzevši npr. $\gamma = 70°$, pa postupak ponavljamo. Računanje se znatno ubrzava ako vrijednosti zadanih stranica b i c označimo olovkom na donjoj skali C jezika. U tablici koja slijedi navedeni su rezultati svih pokušaja i vrijednosti konačno dobivene za kutove γ i β.

Pokušaj	γ	β	$\gamma + \beta$	Primjedba
1.	60°	41,6°	101,6°	premalo
2.	70°	46,0°	116,0°	previše
3.	67°	44,9°	111,9°	Premalo
4.	67,8°	45,2°	113°	dobro

$$\underline{\gamma = 67{,}8° = 67°48'};\quad \underline{\beta = 45{,}2° = 45°12'}$$
$$\sin \beta = 0{,}708.$$

Sada računamo po trojnom pravilu:

$$\underline{a} = \frac{\sin 67° \cdot 36{,}0}{0{,}708} = \underline{46{,}7 \text{ m}}$$

Ako radimo računalom koje ima trigonometrijske skale na stražnjoj strani jezika moramo prije računanja izvaditi jezik iz štapa, okrenuti ga za 180° oko njegove uzdužne osi, pa opet uvući u utore štapa. Računanje počinje s veće stranice c, na čiju vrijednost (47,0), uzetu na donjoj skali D štapa namjestimo crtu kazaljke. Iza toga pomicanjem jezika stavimo pod crtu kazaljke kut γ (60°) uzet na skali S. Namjestimo li sada crtu kazaljke na vrijednost manje stranice b (36,0) uzete na skali D, očitat ćemo na skali S pripadnu vrijednost kuta β (41,6°). Mijenjajući vrijednost kuta γ ponavljamo postupak dok ne dobijemo $\gamma + \beta = 180° - \alpha$ (113°).

Primjer 2.

Zadano: $b = 53{,}0$, $c = 37{,}8$, $\alpha = 118{,}6°$.

Traži se: β, γ, a.

$b > c$, dakle $\beta > \gamma$

$$\beta + \gamma = 180° - \alpha = 61{,}4°$$

$$\sin \gamma = \frac{\sin \beta \cdot c}{b} = \frac{\sin \beta \cdot 37{,}8}{53{,}0}$$

Pokušaj	β	γ	$\gamma + \beta$	Primjedba
1.	30°	20,9°	50,9°	premalo
2.	35°	24,2°	59,2°	premalo
3.	36°	24,8°	60,8°	premalo
4.	36,3°	25,0°	61,3°	premalo
5.	36,4°	25,1°	61,5°	previše

$$\underline{\beta = 36{,}35° = 36°21'},\quad \underline{\gamma = 25{,}05° = 25°3'}$$
$$\sin \gamma = 0{,}423$$
$$a = \frac{\sin \alpha \cdot c}{\sin \gamma} = \frac{\sin 118{,}6° \cdot 37{,}8}{0{,}423} = \frac{\sin 61{,}4° \cdot 37{,}8}{0{,}423} = 78{,}4$$
$$\underline{a = 78{,}4.}$$

Primjedba. Ako je jedna zadana stranica trokuta npr. b vrlo malena spram drugoj zadanoj stranici npr. c, može se dogoditi da traženi kut β bude manji od 5°. U tom slučaju vrijednost kuta β dobijemo tako da vrijednost sin β, koja na kraju računanja leži pod crtom kazaljke, dijelimo s markom 1° koju prethodno nanosimo olovkom na donjoj skali C jezika, jer iz

$$\sin \alpha° = \text{marka } 1° \cdot \alpha° \text{ slijedi: } \alpha° = \frac{\sin \alpha°}{\text{marka } 1°} = \frac{\sin \alpha°}{0{,}01745}$$

(vidi str. 89). Tako postupamo ako radimo računalom sustava »Darmstadt«. Kod drugih sustava računala vrijednost kuta β neposredno očitavamo na skali S & T.

Primjer 3.

Zadano: $b = 1{,}654$, $c = 30{,}18$, $\alpha = 53{,}9°$

$c > b$, dakle $\gamma > \beta$

$\beta + \gamma = 180° - \alpha = 126{,}1°$

Za prvu približnu vrijednost kuta γ uzimamo 125° pri čemu, kad računamo vrijednost sinusa, vršimo prijelaz na suplementni kut, jer je sin 125° = sin (180°—125°) = sin 55°.

$$\sin \beta = \frac{\sin \gamma \cdot 1{,}654}{30{,}18}$$

Pokušaj	γ; (180°—γ)	β	$\beta + \gamma$	Primjedba
1.	125° (55°)	2,57°	127,57°	previše
2.	124° (56°)	2,59°	126,59°	previše
3.	123,5° (56,5°)	2,60°	126,10°	dobro

$$\underline{\gamma = 123{,}5° = 123°30'},\quad \underline{\beta = 2{,}60° = 2°48'}$$
$$\sin \beta = 0{,}0456$$
$$\underline{a} = \frac{\sin 53{,}9° \cdot 1{,}654}{0{,}0456} = \underline{29{,}25}$$

23.2.4. Rješavanje trokuta u kojem su zadane sve tri stranice

I u tom slučaju rješavanja kosokutnog trokuta primjenjuje se navedeni način kušanja ili približavanja. Radi se po sinusovom poučku:

$$\sin \alpha = \frac{\sin \gamma \cdot a}{c} \quad \text{i} \quad \sin\beta = \frac{\sin \gamma \cdot b}{c}$$

gdje je γ kut nasuprot najvećoj stranici dakle: najveći kut u trokutu. Tom najvećem kutu γ dajemo vrijednosti po volji. Na način prikazan u predašnjem slučaju, ostala dva kuta α i β računamo po trojnom pravilu. Zadatak je riješen kad zbroj izračunatih kutova α, β i γ bude iznosio 180°. Početna vrijednost najvećeg kuta γ može se uzeti iz približne slike trokuta.

Primjer 1.

Zadano: $a = 13{,}5$; $b = 14{,}2$; $c = 15{,}1$.

Traže se: α, β, γ.

Kako je $c > b > a$, bit će γ najveći kut, a budući da je trokut gotovo istostraničan, uzmimo 62° za početnu vrijednost kuta γ.

$$\sin \beta = \frac{\sin \gamma \cdot 14{,}2}{15{,}1}, \quad \sin a = \frac{\sin \gamma \cdot 13{,}5}{15{,}1}$$

Pokušaj	1.	2.	3.
γ	62,0°	65,0°	66,0°
β	56,1°	58,4°	59,2°
a	52,1°	54,0°	54,8°
$a + \beta + \gamma$	170,2°	177,4°	180,0°

$\gamma = 66°$, $\beta = 59{,}2° = 59°12'$, $\alpha = 54{,}8° = 54°48'$

Primjer 2.

Zadano: $a = 0{,}732$, $b = 0{,}681$, $c = 0{,}530$

Traže se: α, β, γ.

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha \cdot 0{,}681}{0{,}732}, \quad \sin \gamma = \frac{\sin \alpha \cdot 0{,}530}{0{,}732}$$

Pokušaj	1.	2.	3.	4.
a	70,0°	72,0°	73,0°	73,2°
β	61,0°	62,2°	62,9°	62,95°
γ	43,0°	43,5°	43,8°	43,85°
$\alpha + \beta + \gamma$	184,0°	177,7°	179,7°	180,00°

$\alpha = 73{,}2° = 73°12'$, $\beta = 62{,}95° = 62°57'$, $\gamma = 43{,}85° = 43°51'$

Primjer 3.

Zadano: $a = 95{,}1$; $b = 119{,}6$; $c = 35{,}3$.

Traže se: α, β, γ.

Iz skice trokuta vidimo da je najveći kut β tup pa uzmimo 120° za njegovu početnu vrijednost.

$$\sin a = \frac{\sin \beta \cdot 95{,}1}{119{,}6}, \quad \sin \gamma = \frac{\sin \beta \cdot 35{,}3}{119{,}6}$$

Pokušaj	1.	2.	3.	4.
β, (180°—β)	120,0° (60°)	125,0° (55°)	126,0° (54°)	126,5° (53,5°)
α	43,6°	40,6°	40,1°	39,8°
γ	14,8°	14,0°	13,8°	37,7°
$\alpha + \beta + \gamma$	178,4°	179,6°	179,9°	180,0°

$\beta = 126{,}5° = 126°30'$, $\alpha = 39{,}8° = 39{,}48°$, $\gamma = 13{,}7° = 13°42'$

GRADSKA KNJIŽNICA ZAGREB

POPIS KNJIGA IZ PODRUČJA MATEMATIKE

	N. Din
Apsen: **LOGARITAMSKO RAČUNALO**	22.00
Apsen: **REPETITORIJ ELEMENTARNE MATEMATIKE**	20.00
Apsen: **REPETITORIJ VIŠE MATEMATIKE, I dio**	30.00
Apsen: **REPETITORIJ VIŠE MATEMATIKE, II dio**	40.00
Apsen: **REPETITORIJ VIŠE MATEMATIKE, III dio**	40.00
Apsen: **RIJEŠENI ZADACI IZ VIŠE MATEMATIKE UZ PRVI DIO REPETITORIJA**	30.00
Apsen: **RIJEŠENI ZADACI IZ VIŠE MATEMATIKE UZ DRUGI DIO REPETITORIJA**	45.00
Apsen: **RIJEŠENI ZADACI IZ VIŠE MATEMATIKE UZ TREĆI DIO REPETITORIJA**	36.00
Blanuša: **VIŠA MATEMATIKA I/1**	50.00
Blanuša: **VIŠA MATEMATIKA I/2**	60.00
Blanuša: **VIŠA MATEMATIKA II/1**	45.00
Bronštejn - Semendjajev: **MATEMATIČKI PRIRUČNIK**	45.00
Demidovič: **ZADACI I RIJEŠENI PRIMJERI IZ VIŠE MATEMATIKE S PRIMJENOM NA TEHNIČKE NAUKE**	45.00
Elazar: **NOMOGRAFIJA**	25.00
Gnedenko - Hinčin: **UVOD U TEORIJU VJEROJATNOSTI**	20.00
Hanžek: **TRIGONOMETRIJA U RAVNINI**	10.00
Justinijanović: **NACRTNA GEOMETRIJA**	22.00
Kurepa: **KONAČNO DIMENZIONALNI VEKTORSKI PROSTORI I PRIMJENE**	90.00
Pal: **NACRTNA GEOMETRIJA U ANAGLIFSKIM SLIKAMA**	50.00
Vranić: **VJEROJATNOST I STATISTIKA**	27.00

Narudžbe prima:

TEHNIČKA KNJIGA

IZDAVAČKO PODUZEĆE — ZAGREB

Jurišićeva 10 — Poštanski pretinac 02-87

Račun kod SDK Zagreb, broj 301-1-7096

54.718b

Znak: 539 PB

Izdanje:
Dr BORIS APSEN, prof. ing.

LOGARITAMSKO RAČUNALO – OSNOVI I PRAKTIČNO RAČUNANJE

VII izdanje

Izdavač:
TEHNIČKA KNJIGA — izdavačko poduzeće
ZAGREB, Jurišićeva 10

Za izdavača odgovara:
KUZMAN RAŽNJEVIĆ, dipl. ing.

Glavni urednik:
ZVONKO VISTRIČKA

Urednik Politehničke biblioteke:
MARIJAN BREZINŠĆAK, dipl. ing.

Urednik edicije:
IVAN UREMOVIĆ

Crteži:
MILOVAN KAVŠEK
TOMISLAV STRUJIĆ

Korigirao:
AUTOR

Naslovnu stranu opremio:
SREĆKO PRELOVEC

Tisak:
Grafički Zavod Hrvatske - ZAGREB

Tisak dovršen:
U prosincu 1969.

76.

23. X. 1973
19. XI. 1973
25. III. 3114
29. IV. 1974 2123
5. XI. 1974 3729
11. 13 84
1. V. 1975
24. VI. 1975
24. VI. 1975 4643
28. X. 1975
29. 5538
23-10-1977 2775
13262
5. I. 1979

Izdavači: »Narodne novine«, Zagreb, (28) — UT-XI/11-10
»Školska knjiga«, Zagreb, — 668 - 1972.

510.c
APS
1
140.587

„NN" (24) - UT - XI/11—8
„ŠK" — 657 - 1969.

518.2
APS
l

TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB